

数学的な表現を用いて説明する力を高める授業の工夫

— 文字式を用いた説明の構想を立てる学習を通して —

北広島町立豊平中学校 久次 満治

研究の要約

本研究は、文字式を用いた説明の構想を立てる学習を通して、数学的な表現を用いて説明する力を高める授業の工夫について考察したものである。文献研究から、数学的な表現を用いて説明する力を高めるためには、仮定と結論を明確にする、数や図形の性質を帰納的に予想する、解析的思考を働かせて説明の方針を立てる、という三つの活動を充実させることが大切であることが分かった。そこで、第3学年「多項式」の単元において三つの活動を、文字式を用いた説明の構想を立てる学習として定義し、説明し伝え合う活動や発展させる活動とともに授業モデルの中に取り入れた。その結果、生徒は見通しをもって文字式を用いた証明を正確に記述できるようになり、帰納によって導かれた結論を演繹によって確かめることができた。このことから、文字式を用いた説明の構想を立てる学習は、数学的な表現を用いて説明する力を高めることに有効であることが分かった。

キーワード：予想 構想 結論とその根拠の両方を表現する

I 主題設定の理由

中央教育審議会答申「幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について」の中で、数学的な思考力・表現力を育成するため「根拠を明らかにし筋道を立てて体系的に考えることや、言葉や数、式、図、表、グラフなどの相互の関連を理解し、それらを適切に用いて問題を解決したり、自分の考えを分かりやすく説明したり、互いに自分の考えを表現し伝え合ったりすることなどの指導を充実する」¹⁾と示されている。この答申を受け、中学校学習指導要領（平成20年）で言語活動の充実が各教科等を通じて重視されたことを踏まえ、表現したり読み取ったりしたことを基に、説明したり伝え合ったりすることの重要性が強調された。第2、3学年の数と式の領域において「文字を用いた式で数量及び数量の関係をとらえ説明できること」²⁾が明示され、数学的な表現を用いて説明する力が重視されている。

表1 全国学力・学習状況調査の分析(%)

	H19	H20	H21	H22	H24	H25
正答率	42.5	39.7	41.7	26.4	38.8	39.3
無解答率	28.1	26.8	17.2	27.3	22.5	34.0

しかし、全国学力・学習状況調査（以下、「全国学力」とする。）中学校数学の主として「活用」に関する問題において、「事柄が成り立つ理由を、示された

方針に基づいて説明する問題」における正答率と無解答率は、表1に示すように継続的な課題も多く、指導方法の工夫・改善が求められている。

そこで、第3学年の「式の計算の利用」の学習において、文字式を用いた説明を記述する前の段階として、文字式を用いた説明の構想を立てる授業モデルを提案する。図形領域の論証問題における先行研究の成果を、文字式を用いた説明の指導に取り入れることで、生徒は文字式の表す内容を的確に捉え、事柄が成り立つ理由を説明することができると考える。このことから、文字式を用いた説明の構想を立てる学習を行うことで、数学的な表現を用いて説明する力を高めることができると考え、本主題を設定した。

II 研究の基本的な考え方

1 数学的な表現を用いて説明する力について

(1) 数学的な表現を用いて説明する力とは

岡田樟男（2007）は、「数学的な表現には数式・文字式のような数学に固有な記号はもちろんのこと、それ以外に、表、グラフ、線分図などの図、さらに『平行四辺形』などの用語や、『直線上の点』などという数学に固有な言い表し方も含まれる」³⁾と定義している。

中学校学習指導要領解説数学編（平成20年、以下「解説数学編」とする。）において、「数学的な推論

には、主なものとして帰納、類推、演繹があり、それらは数や図形の性質などを見いだしたり、数学を利用したり、数学的に説明し伝え合ったりする際に重要なはたらきをする」⁴⁾と示されている。また、解説数学編には、他人を納得させることができるように筋道を立てて表現すること自体が推論の能力を高めることになる」と述べられ、説明し伝え合う活動が重視されている。このことから、本研究では「数学的な表現を用いて説明する力」を「数式・文字式、数学用語など数学に固有な記号や表現を用いて、帰納や類推によって導かれた事柄を、演繹によって確かめ結論を導く力」と捉えることにする。

(2) 数学的な表現を用いて説明する力が定着していない原因分析

論理的な考え方の育成を目指し、小学校の段階から論証のための準備を行ってきたにもかかわらず、数学的な表現を用いて説明する力を生徒に定着させることは中学校数学科での継続的な課題となっている。片桐重男（2004）はFehrの問題解決の過程が、算数・数学の問題解決を考えると、最も適当と示している。

そこで、全国学力の報告書、及び國宗（1993）らの先行研究の論を参考に、文字式を用いた説明における課題を、片桐の学習過程の五つの段階に当てはめ、表2のように整理及び分析する。

表2 文字式を用いた説明における課題の分析

問題解決の段階	主な原因
問題把握・形成	①題意を理解することができない。
見通しを立てる	②仮定と結論を的確に捉えることができない。帰納的な説明で十分であると考えている。 ③文字式の表現、変形及び説明の手順など含まれている学習内容が多く、説明の見通しがもてない。 ④文字式を計算して目的に合うように式変形することができない。
解決の実行	⑤式変形して得られた文字式の意味を理解することができず、結論とその根拠の両方を記述することができない。
検討 (発表・練り上げ)	⑥他者との交流を通し、自分の説明を客観的に検討し、振り返ることができない。
発展 (まとめ)	⑦問題の条件を変更することで、新たな性質を見だし、その性質が成り立つことを文字を用いて一般的に説明する学習活動に習熟していない。

(3) 数学的な表現を用いて説明する力を高めるために

松元新一郎（2009）は、『『数学的な表現力』で大切にしたいこと』の中で、論理的に考えたことを表

現することの重要性について述べており、中学校数学科では、第2学年からの文字式を用いた説明や図形の論証の場面を通して、演繹的な考え方を中心として推論する能力を高め、自分の考えを他者に伝えるために数学固有の表現形式で話したり、書いたりする力の定着を図る必要性を提起している。

小山正孝（2010）は、数学的な表現力について、思考の過程や結果を、その根拠となることを明らかにして、数学的な表現を用いて、他者に分かるように、筋道を立てて表現したり、説明したりすることができる能力であると定義している。さらに、数学的な表現力と思考力は表裏一体のものであるから、生徒の表現力と思考力を相互に関連付けて育てることが大切であると述べ、以下の三つの段階を学習活動に取り入れるように提言している。

⑦数学的問題解決の結果や方法についての見通しをもつ。

⑧明確な根拠に基づいて数学的に考えを進める。

⑨思考の過程や結果を、数学的な表現を用いて、根拠を明らかにし筋道を立てて説明し合う。

文字式を用いた説明の学習活動は、数学固有の表現形式で話したり、書いたりする場が保障され、上記の三つの段階を含んでいる。そこで、表2の七つの原因に対し、具体的な指導の手立てを考え、授業モデルの中に位置付けることで、生徒は文字式を用いて演繹的に推論を進めることができ、これによって数学的な表現を用いて説明する力が高まると考える。

2 文字式を用いた説明の構想を立てる活動について

水谷尚人（2013）は、「結論を導くために何が必要であるかを明らかにしたり、与えられた条件を整理したり、着目すべき性質や関係を見いだしたりするなどして、証明の方針を立てることが有効である。そうすることで、見通しをもって証明を書くことができるようになると考えられる」⁵⁾と主張している。

全国学力・学習状況調査の4年間の調査結果から今後の取組が期待される内容のまとめにおいても、数の性質が成り立つ理由を説明するために、見通しをもつことが大切であると述べられており、具体例として「3の倍数であることを説明するためには、式を $3 \times$ （自然数）の形にすればよい」というように、問題解決のための見通しをもてるように指導することが大切であると示されている。

これらのことから、文字式を用いた説明に生徒が取り組む際、問題解決の段階における「見通しを立

てる段階」を重視する必要があると考える。そこで、この「見通しを立てる段階」における三つの原因に対し、具体的な指導の手立てとして説明の構想を立てる学習を考える。

原因②の過程と結論を的確に捉えることができないことについて、鈴木ら（1998）の研究では、式の計算とは、本来、目的があって、それに向かって計算法則に従って進められるものであり、命題の仮定と結論を意識し、その結論を表すために必要な式変形を考えることが必要であると述べている。

また、帰納的な説明で十分であると考えていることについて、國宗ら（1994）の研究によると、帰納的な方法を駆使して、ある性質が成り立つのではないかと予想することは、生徒にとって大変価値のある学習活動であること、また、生徒は帰納的に考え説明することに強い信頼をおいていることが報告されている。一方で、生徒の帰納に対する考えを大切にしながらも、「いつでも・どこでも」、「必ず成り立つ」といった説明に必要な一般性を意識させながら、文字のもつ一般性、文字式を用いた説明の簡潔さを、繰り返し指導していく姿勢が大事であると述べられている。

原因③の見通しがもてないことについて、岡崎正和（2010）は、演繹的推論によって証明を行う過程で、総合と解析の2種類の思考、とりわけ解析的思考の重要性を述べている。

〈総合〉 A （仮定） $\rightarrow P_1 \rightarrow \cdots \rightarrow P_n \rightarrow B$ （結論）
〈解析〉 A （仮定） $\leftarrow P_1 \leftarrow \cdots \leftarrow P_n \leftarrow B$ （結論）

図1 総合的思考と解析的思考

図1に示すように、総合的思考はあらかじめ真と認められた事柄から出発し、推論の連鎖によって証明すべき事柄まで到達させようとする思考であり、解析的思考とは、証明されるべき結論や解決されるべきものが得られたとして、それを手がかりに証明や問題解決の方法を見付けようとする思考である、と定義されている。小倉直子（2011）も、文字式を用いた説明における式変形を、単なる計算として捉えている生徒が多く、結論から逆に考えて適切に式変形を行うためには、解析的思考の習得が必要であると述べている。これらのことから、問題場面の中の数量を文字式で的確に表現し、解析的思考で説明の流れを結論から逆に考えることで、生徒は文字式を用いた説明の見通しをもつことができると考え

る。

原因④の目的に合うように式変形ができないことについて、小岩大（2010）は目的に応じた式変形に必要な力として、二点挙げている。一つは、「文字式の変形＝式を最も簡単な形にする」から「文字式的変形＝目的に応じた式変形」へと生徒の意識を変える必要があること、もう一つは、言葉で表された目的に対し、目的を言葉ではなく文字式で想定できる力を身に付けさせなければならないことについて述べている。この目的を言葉ではなく文字式で想定する際にも、解析的な思考が有効であると考え

る。前述を受け、本研究では、文字式を用いた説明の構想を立てる学習として、表3に示した三つの活動を行う。その後、説明の記述を行わせることとする。

表3 説明の構想を立てる学習

説明の構想を立てる学習		
仮定と結論を明らかにする活動	帰納的に予想する活動	説明の方針を立てる活動
問題や図の中から、分かっていることと証明すべきことを書き出して整理する。	具体的な数を用いて、数や図形の性質を帰納的に予想する。	与えられた数量を文字で的確に表現し、結論を導くために必要な文字式を記述する。

3 結論とその根拠を的確に表現するための工夫

原因⑤の結論とその根拠の両方が記述できないことについて平成25年度全国学力の報告書によると、最も高い割合の誤答類型は、結論とその根拠を的確に表現できていない形のものであった。つまり、ある事柄が成り立つ理由を説明する場合、「○○であるから△△である」の形のように、説明対象となる事柄の根拠を示すことと、その根拠に基づいて事柄が成り立つことを示すことの両方が必要である。多くの生徒は、結論を示すことはできるが、その根拠を示すことができていない。

清水邦彦（2011）も、生徒のノートの記述やテストの答案から「記述式問題では論理的な関係を表す言葉が求められるが、どのように書いたらよいか分かっていないように感じる」⁶⁾と述べ、多くの生徒が論理的な関係を表す言葉を用いることに困難さを感じていることを指摘している。

そこで、図2に示すような工夫をワークシートに取り入れ、生徒が説明する相手の存在を意識し、根拠と結論を数学的な表現を用いて的確に表現することができる活動を取り入れる。ワークシートの中では、根拠の部分理由とした。

(文字式を変形してきて)

したがって、

----- であるから、----- である。

(理由)

(結論)

図2 ワークシートの工夫

4 説明し伝え合う活動と発展させる活動における工夫

原因⑥の自分の説明を客観的に振り返ることができないこと、及び原因⑦の問題の条件を変更し学習を発展させることができないことについて、清水美憲(2011)は、「言語としての数学の特質に配慮しながら、生徒なりの拙い表現や誤った表現を数学的表現に高めていくことが、指導改善の視点となる」⁷⁾と述べている。また、神原一之(2007)は、数学的な表現力を高める指導のポイントの一つに相手を意識したコミュニケーション場面を設定することを挙げている。その際、お互いの誤答から気付かせる活動を大切にすることで、生徒の数学的表現力が高まっていくと述べている。

全国学力・学習状況調査の4年間のまとめにおいても、生徒の説明を基にして、説明の不足を補う活

動、簡潔な説明で表現させる活動など、よりの確な説明へと改善する学習活動が、授業改善の一つとして提案されている。そのため、自分の考えと相手の考えとの共通点や相違点はどこなのか、また他者の説明で参考になる点はどこなのかという視点で説明し伝え合うことが、数学的な表現を用いて説明する力を高めることにつながると考える。また、一つの原題で終わるのではなく、生徒同士の意見交流から問題の条件を変更し、新たな数や図形の性質を見いだすなどの問題を発展させる活動を取り入れることで、生徒が数学のよさを実感することができると考える。

そこで、説明し伝え合う活動では、様々な学習形態を活用して仲間と説明し合い、説明のよさや相違点等を発表させるようにし、発展させる活動では、問題の条件を変更することで新たな数や図形の性質を見だし、その性質を文字式を用いて説明させる。これら二つの活動における工夫を授業モデルの中に取り入れる。

5 説明の構想を立てる活動を取り入れた授業モデル

問題解決の段階	学習活動	指導のポイント
問題把握形成	題意を理解する	①課題を提示する際、図を活用したり日常生活に身近な題材を積極的に取り入れたりする。
見通しを立てる	<div style="border: 1px dashed black; padding: 10px; margin: 10px;"> <div style="text-align: center; background-color: #0070C0; color: white; padding: 5px; margin-bottom: 10px;">説明の構想を立てる学習</div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">帰納的に 予想する</div> <div style="font-size: 2em;">↔</div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;">仮定と結論を 明らかにする</div> </div> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center; margin-top: 10px;">説明の方針を立てる</div> </div>	②具体的な数値を用いて帰納的に類推し、数や図形において成り立つ性質を予想させる。 ③分かっていることを仮定とし、説明すべきことを結論として、問題から書き出し整理させる。 ④解析的思考を働かせる。結論を導くために必要な文字式を想起させ、式変形の見通しをもたせる。
解決の実行	結論とその根拠を表現する	⑤説明する相手を意識した「○○であるから、△△である」という論理的な表現を使わせる。
検討 (発表・ 練り上げ)	説明の内容、説明の仕方についての相互評価	⑥様々な学習形態を活用して仲間と説明し合い、説明のよさや相違点等を発表させる。
発展 (まとめ)	問題を発展させ、新たな性質を見だし説明する	⑦問題の条件を変更することで、新たな性質に気付かせる。また、その性質を文字式を用いて説明させる。
<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">数学的な表現を用いて説明する力の高まり</div>		

図3 数学的な表現を用いて説明する力を高める授業モデル

これまでに述べてきたことを基に、数学的な表現を用いて説明する力を高めるための授業モデルを図3に示す。

Ⅲ 研究の仮説と検証の視点と方法

研究の仮説と、検証の視点と方法を表4に示す。

表4 研究の仮説と検証の視点と方法

研究の仮説	説明の構想を立てる学習を取り入れた授業を行うことにより、生徒は仮定から結論へ至る説明の全体構造を捉えることができるようになり、数学的な表現を用いて説明する力が高まるであろう。	
	検証の視点	検証の方法
	(1) 仮定と結論を明らかにし、数や図形の性質を帰納的に予想することができたか。	行動観察 ワークシート
	(2) 説明の方針を立てることができたか。	行動観察 ワークシート
	(3) 説明の構想を立てる学習を通して、数学的な表現を用いて説明することができたか。	プレテスト・ポストテスト

Ⅳ 研究授業について

1 研究授業の計画

- 期 間 平成26年7月7日～平成26年7月11日
- 対 象 所属校第3学年（16人）
- 単元名 多項式
- 目 標
文字を用いた式で数量及び数量の関係を捉え、説明の構想を立てる学習を通して説明する力を高める。
- 学習指導計画（全5時間）

1	プレテスト
2	【問題】数の性質を予想し、予想したことを証明する。 【適用題】
3	【問題】カレンダーの数の並びについて、いつも成り立つ性質を見付け、そのことを文字式を用いて証明する。 【適用題】
4	【問題】図形の性質を予想し、予想したことを証明する。 【適用題】
5	ポストテスト

2 研究授業の分析と考察

(1) 仮定と結論を明らかにし、数や図形の性質を帰納的に予想することができたか

最初に、文字式を用いて説明する前段階として、数や図形の性質を帰納的に予想することができているかを生徒のワークシートを基に検証する。ワークシートに出題した問題を表5に示す。

表5 ワークシートに出題した問題

第1時	【問題1】 連続する2つの偶数の積に1を加えると、どんな数になるのかを予想し、予想したことを証明せよ。 【適用題】 連続する2つの整数では、大きい数の2乗から小さい数の2乗をひいた差は、どんな数になるかを予想し、予想したことを証明せよ。
第2時	【問題2】 カレンダーの数の並びについて、いつも成り立つ性質を見付け、文字式を用いて証明せよ。 【適用題】 恵さんは、カレンダーの中からある性質を見付け、その性質がいつも成り立つことを次のように文字式を用いて表した。 $x^2 - (x + 7)(x - 7) = 49$ 恵さんは、どんな囲み方をして、どんな性質を見付けたのだろうか。式から読み取り、図や言葉を用いて説明せよ。
第3時	【問題3】 円形の池の周囲に、幅が一定の道がある。この道の面積を求めるのに、Aさんは、道の中央を通る円の周りの長さとの間に、きまりがあると予想した。そのきまりを見付け、成り立つかどうかを調べよ。 【適用題】 正方形の花壇ア、長方形の花壇イがある。イの花壇は、アの1辺の長さより、縦が3m長く、横が3m短い。アとイの面積はどちらが大きいかを予想し、そのことを証明せよ。

ワークシートの問題は、使用している教科書の問題を基に作成した。第1時は整数のもつ性質に関する問題、第2時は生活に身近なカレンダーの中の4つの数を囲んで成り立つ数の性質に関する問題、第3時は図形のもつ性質に関する問題を取り上げた。各問題における予想する、方針を立てる、証明を記述する、それぞれの学習段階での正答率を表6に示す。

表6 ワークシートにおける学習段階の正答率

問題		予想(%)	方針(%)	記述(%)
第1時 数の性質	問題1	62.5	50.0	12.5
	適用題	87.5	68.8	68.8
第2時 カレンダー	問題2	56.3	43.8	43.8
第3時 図形の性質	問題3	6.3	0	0
	適用題	81.3	75.0	75.0

第1時の数の性質に関する問題では、具体的な数を複数挙げて計算することで、予想することのできた生徒が半数を超えた。第1時の問題1で生徒の予想した内容を分類すると、「奇数になる（43.8%）」

「連続する偶数の間の奇数の2乗になる(18.7%)」であった。

第2時のカレンダーの問題は、様々な予想とその証明を交流することをねらいとして出題した。生徒の予想した内容を分類すると、「対角のそれぞれの2数の和は等しい(18.7%)」、「下段の2数の和から上段の2数の和を引いた差は14である(25%)」、「左列の2数の和から右列の2数の和を引いた差は2である(12.5%)」であった。

第3時の図形の性質に関する問題では、「道の面積は道の幅と道の中央を通る円の円周の長さの積である」が正答であったが、準正答の形で予想できた生徒が一人であった。その要因をワークシートの記述と生徒の発言から分析すると、既習事項である円の面積や円周の長さの求め方の定着が十分に図れていなかったこと、計算しやすい偶数の使用を促しても予想する際の計算が複雑で、予想することができなかったことが挙げられる。

適用題で予想できた生徒の割合は、第1時は「連続する2数の和になる(87.5%)」であり、第3時は「花壇アの面積が花壇イの面積よりも9大きくなる(81.3%)」であった。導入題での学習内容を生かすことで、具体的な数を用いて数や図形の性質を帰納的に予想することができた生徒が大幅に増加したと考えられる。

これらのことから、具体的な数を用いた試行を繰り返し、帰納的に予想することで、何を証明しなければならないのかが生徒の中に明確になり、見通しをもって取り組むことができると考えられる。

(2) 説明の方針を立てることができたか

表7 ワークシートの記述内容の分類と段階

段階	記述内容
IV	予想(結論)を記述し、与えられた数量及び結論を導くために必要な形を文字式で表現している。
III	予想(結論)を記述し、与えられた数量を文字式で表現しているが、結論を導くために必要な形を文字式で表現していない。
II	予想(結論)は記述しているが、与えられた数量及び結論を導くために必要な形を文字式で表現していない。
I	無解答

解析的思考を用いて説明の方針を立てるための指導の手立てとして、「予想したこと(結論)を証明するためには、〇〇を(文字)とにおいて、△△であることを示せばよい」という話型を準備し、説明に必

要な方針を立てる活動とした。

ア 第1時における学習活動の分析から

第1時の導入題と適用題におけるワークシートの記述を基に検証する。第1時の導入題と適用題におけるワークシートの記述内容の分類と段階を表7に示し、その変容をクロス集計表で表8に示す。

表8 第1時の説明の方針のクロス集計表

適用題 導入題	IV	III	II	I	計(人)
IV	5	0	3	0	8
III	0	0	0	0	0
II	6	0	2	0	8
I	0	0	0	0	0
計(人)	11	0	5	0	16

表8から、説明の方針を立てることができた段階IVの生徒は、8人から11人に増加した。

表9 第1時の説明の方針を立てる活動における誤答

問題 【正答】	誤答	誤答数	誤答合計
連続する2つの偶数 【 $2n, 2n+2$ 】	$x, x+2$	5	8
	$2x, 4x$	1	
	$n+1, 2n+2$	1	
	$x-1, x+1$	1	
連続する2つの数 【 $x, x+1$ 】	$2x, 2x+2$	2	5
	$x+1, x-1$	2	
	$2x, 3x$	1	

この導入題では、半数の生徒が段階IIの誤答であり、表9に示しているように、与えられた数を文字式で的確に表現できないものであった。そのため、生徒が適用題を自力解決した後、段階IIの「連続する2つの偶数を $x, x+2$ 」と表現した生徒の記述を基に、学級全体で問題解決に取り組み、整数や偶数などの基本的な数を文字式で表現することの共通理解を図った。この結果、導入題の段階IIであった8人の生徒のうち、6人が適用題において連続する2つの数を文字式で的確に表現することができ、段階IVとなった。一方で、導入題で連続する2つの偶数を文字式で的確に表現できていたが、適用題で連続する2つの数を文字式で表せない生徒や、導入題に続き段階IIに留まっている生徒もいたため、家庭学習という形で、理解の定着を図った。

この第1時の取組から、生徒は予想した数の性質を説明する際、文字式の必要性を理解し、文字式を用いて説明の方針を立てることを試みている。しかし、段階IVに到達していない多くの生徒は、与えられた数を文字式を用いて的確に表現できなかったた

めに、結論を導くために必要な形を文字式で表現することができず、説明の方針を立てることができなかったと考えられる。

イ 第3時における学習活動の分析から

続いて、第3時の導入題と適用題におけるワークシートの記述を基に検証する。表7のワークシートの記述内容の分類と段階に基づき、表10にその変容をクロス集計表で示す。

表10 第3時の説明の方針のクロス集計表

適用題 導入題	IV	III	II	I	計 (人)
IV	0	0	0	0	0
III	2	0	0	0	2
II	10	2	2	0	14
I	0	0	0	0	0
計(人)	12	2	2	0	16

第3時の問題では、道の面積、道幅、道の中央の円周の長さ、池の半径で四つのを使用したため、与えられた数量を文字式で表現できない段階Ⅱの生徒が14人いた。そのため、この問題は予想する段階から学級全体で取り組み、正確に図をかくところから指導した。この結果、適用題では14人の生徒が正方形の1辺の長さを文字式で表現することで、長方形の縦と横の長さを文字式を用いて表現することができ、そのうちの12人が結論を導くために必要な形を文字式で的確に表現することができた。この導入題での段階Ⅱから適用題で段階Ⅳとなった生徒の授業後の振り返りの中で「難しかったけど、自分で方針を立て、初めて自分の力で証明できたのでよかった。」「証明するのが難しかったです。だけど、方針をよく見たら証明ができたのでよかったです。」と記述していた。

この導入題では、方針が立てられない多くの生徒は段階Ⅱに課題があったが、与えられた数量を文字式で表現するための指導を丁寧に行ったことで、適用題では多くの生徒が段階Ⅳに到達した。このことから、より多くの生徒が説明の方針を立てるためには、すべての学年や領域において文字式で表現させる、文字式の計算をさせる、文字式の意味を読み取らせる、文字式の変数としての理解を深めさせるなどの指導を充実させていくことが必要であると考えられる。

(3) 説明の構想を立てる学習を通して、数学的な表現を用いて説明することができたか

検証に用いたプレテスト、ポストテストをそれぞれ図4、図5に示す。プレテストは平成25年度全国学力の問題、ポストテストは平成22年度全国学力の問題を出題した。この問題は、見いだされた事柄に

ついて、事柄が成り立つ理由を、方針に基づいて説明する問題である。

大輝さんは、2けたの自然数と、その数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数の差がどんな数になるかを調べ、次のように予想した。

2けたの自然数と、その数の十の位の数と一の位の数を入れかえた数の差は、9の倍数になる。

この予想がいつでも成り立つことを説明せよ。

図4 プレテストの問題3

健太さんは、連続する3つの奇数の和がどんな数になるかを調べ、次のように予想した。

連続する3つの奇数の和は、3の倍数になる。

この予想がいつでも成り立つことを説明せよ。

図5 ポストテストの問題3

國宗(1997)の先行研究における分類を参考に、解答類型を段階ごとに分類したものを表11に示す。

表11 文字式を用いた説明の解答類型の分類

段階	解答類型
V	文字式を使って、結論とその根拠の両方を記述している。
IV	文字式を使っているが、結論とその根拠の両方を記述できていない。
III	文字式を使っているが、その記述に誤りがある。
II	文字式を使わずに、具体的な数値を挙げたり、言葉で説明しようとしていたりしている。
I	無解答又は問題文を繰り返しているだけで、説明になっていない。

プレテストとポストテストにおけるそれぞれの問題3について、生徒の記述内容を表11の5段階に分類し、その結果をクロス集計表で表12に表す。

表12 問題解決状況のクロス集計表

ポスト プレ	V	IV	III	II	I	計 (人)
V	1	0	0	0	0	1
IV	1	0	0	0	0	1
III	1	0	0	0	0	1
II	2	1	5	1	0	9
I	0	1	3	0	0	4
計(人)	5	2	8	1	0	16

無解答を含め、プレテストでは文字式を使わずに説明を終えていた段階Ⅱ以下の生徒13人のうち12人が、ポストテストでは文字式を用いて説明する段階Ⅲ以上に上がっており、無解答の生徒は0人であった。これは、説明の構想を立てる学習の中の仮定と

結論を明らかにする活動と帰納的に予想する活動に生徒が取り組むことで、文字式を用いて説明する必要性を理解したことがその要因と考えられる。

一方で、ポストテストにおいて段階Ⅲに留まった生徒8人は、連続する3つの奇数を文字式で的確に表現できないことが原因であった。そのため、説明の方針を立てることができず、正答に至らなかったと考えられる。

また、ポストテストにおいて説明の方針を立てることができたにもかかわらず、段階Ⅳに留まった生徒の誤答記述を以下に示す。

【正答例】

〈説明の前半は略〉

$$=3(2n+1)$$

n は整数で、 $3(2n+1)$ は3の倍数であるから
連続する3つの奇数の和は、3の倍数となる。

【誤答例】

〈説明の前半は略〉

$$=3(2n+1)$$

n は整数であるから
連続する3つの奇数の和は、3の倍数となる。

ポストテスト問題3における結論とその根拠の正答例と誤答例

全国学力の報告書の誤答分析によると、上記の誤答例のような記述では、結論とその根拠の両方を記述したことにはなっていない。つまり、生徒は結論に必要な文字式の形(「 $3 \times$ 整数」の形)や「 $\bigcirc\bigcirc$ であるから、 $\triangle\triangle$ である」という記述が、証明する際には必要であることを理解できていても、結論を述べるために必要な根拠が何であるかを十分に把握することができていないことが要因であると考えられる。

プレテスト、ポストテストの分析から、説明の構想を立てる学習は、生徒が数や図形の性質を具体的な数を用いて帰納的に予想する際に有効であったと考える。また、説明の方針を立てることができた生徒の多くは、その後の説明を正確に記述することができていた。このことから、与えられた数量を文字式で的確に表現するという既習事項が定着している生徒は、文字式を用いた説明の構想を立てる学習に取り組むことで、帰納的に予想した事柄を演繹によって確かめ結論を導くことができたと考えられ、数学的な表現を用いて説明する力を高める一定の効果があったといえる。

V 研究のまとめ

1 研究の成果

文字式を用いて説明の構想を立てる学習を取り入れることで、生徒は数や図形の性質を予想するところから問題解決に取り組み、全国的に無解答率の高い問題に対し、生徒全員が説明の記述を試みるようになった。また、ポストテストでは16人中15人の生徒が文字式を用いて演繹的に結論を導こうとしており、数学的な表現を用いて説明する力を高めるために有効な手段であったと考える。

2 今後の課題

本研究で作成した授業モデルの実践に一定の効果はあった。しかし、説明の構想を立てる学習を取り入れることと、生徒相互に説明を交流し、よりよい表現に完成させていく活動を、50分の授業の中に取り入れていくことの両立が十分に達成できたとはいえない。予想する、構想を立てる、説明を記述する、説明の交流を通しさらによりよい説明を完成させていく、これらの活動を取り入れた授業モデルについて、さらに研究を進めていく必要がある。

また、説明の構想を立てる学習において、既習事項である与えられた数量を文字式で的確に表現することに大きな課題があることが分かった。他の領域の学習内容においても、様々な数量を文字式を用いて表現させたり、文字式の表す意味を読み取らせたりする指導を継続的に進めることで、文字式を用いた論証指導の基礎を定着させていく必要があると考える。

【引用文献】

- 1) 中央教育審議会(平成20年):「幼稚園, 小学校, 中学校, 高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について(答申)」 p. 83
- 2) 文部科学省(平成20年):『中学校学習指導要領』 p. 37, p. 40
- 3) 岡田禎男(2007):『『数学的な表現力』について考える』『教科研究数学 No. 184』学校図書 p. 3
- 4) 文部科学省(平成20年):『中学校学習指導要領解説数学編』教育出版 p. 29
- 5) 文部科学省(平成25年):『中等教育資料 No. 921』 p. 54
- 6) 清水邦彦(2011):「数学的な表現を用いて正しく記述することができない(1)」『数学教育 No. 649』明治図書 p. 50
- 7) 清水美憲(2011):「書き言葉としての『数学語』による説明の特質」『数学教育 No. 649』明治図書 p. 8

【参考文献】

- 國宗進(1997):『確かな理解をめざした文字式の学習指導』明治図書
- 鈴木裕, 他3名(1998):「文字式による論証(第6次報告)」『日本数学教育学会誌 第80巻 第11号』
- 数学教育研究会編(平成22年):「新訂数学教育の理論と実際」聖文新社