授業研究（数学科）

# 中学校数学科における数学的な見方・考え方を働かせる学習指導の工夫
## ―　「異なる予想」が生じるような問題に取り組む活動を通して　―

三次市立三次中学校　佐々木　精一

**研究の要約**

本研究は，中学校数学科において「異なる予想」が生じるような問題に取り組む活動が，生徒の数学的な見方・考え方にどのように影響するのかを考察したものである。全国学力・学習状況調査の結果から，数学の問題の解決過程を振り返り，構想を立てて事柄が成り立つ理由を説明するなどの生徒の数学的な見方や考え方が，十分に育まれていないことが継続的な課題とされている。そのため，このような数学的な見方・考え方を働かせたり，育んだりするための手立てとして，「異なる予想」が生じるような問題に取り組む活動を学習場面に取り入れることを考えた。具体的には，中学校第２学年の文字式の利用において，「異なる予想」が生じるような問題開発及び授業実践を行った。授業やプレ，ポストテストの分析により，「異なる予想」が生じるような問題に取り組むことは，生徒が有している数学的な見方・考え方を働かせることにつながることが明らかになった。

## Ⅰ　主題設定の理由

中学校学習指導要領（平成29年告示）解説数学編（平成30年，以下「29年解説」とする。）の数学科の目標には，「数学的な見方・考え方を働かせ，数学的活動を通して，数学的に考える資質・能力を育成する」[1]ことを目指すとある。柱書の冒頭に「数学的な見方・考え方を働かせ」とあるように，数学的な見方・考え方が重視されており，数学教師には数学的な見方・考え方を働かせられるような学習指導を実現していくことが強く求められている。一方，全国学力・学習状況調査の中学校数学においては，単元「文字式の利用」について，「問題解決の過程を振り返って，構想を立てて事柄が成り立つ理由を説明する」タイプの問題が継続的に出題されているが，それらの正答率や無解答率の状況から，生徒の数学的な見方や考え方が十分に育まれていない実態がある（表１）。これについては所属校の生徒についても同様の状況である。

表１　全国学力・学習状況調査における正答率及び無解答率(%)

| 年度 | 正答率 | 無解答率 | 年度 | 正答率 | 無解答率 |
|---|---|---|---|---|---|
| 19 | 42.5 | 28.1 | 25 | 38.4 | 22.4 |
| 20 | 39.7 | 26.8 | 26 | 44.9 | 6.2 |
| 21 | 41.7 | 17.2 | 27 | 44.2 | 23.3 |
| 22 | 26.4 | 27.3 | 28 | 52.3 | 2.2 |
| 23 | － | － | 29 | 15.5 | 22.8 |
| 24 | 38.8 | 22.5 | 30 | 38.6 | 24.3 |

上記の課題を解決していくために，本研究では，はじめに数学的な見方・考え方について整理し，それを働かせるための学習指導について検討していく。その後，中学校第２学年の単元「文字式の利用」において学習場面を具体化したものについて授業実践及び検証をしていくことにより，生徒の数学的な見方･考え方を働かせる学習指導について考察する。

## Ⅱ　研究の基本的な考え方

### １　数学的な見方・考え方を働かせる学習指導について

#### (1) 数学的な見方・考え方

「29年解説」では，数学的な見方を「事象を数量や図形及びそれらの関係についての概念等に着目してその特徴や本質を捉えること」，数学的な考え方を「目的に応じて数，式，図，表，グラフ等を活用しつつ，論理的に考え，問題解決の過程を振り返るなどして既習の知識及び技能を関連付けながら，統合的・発展的に考えること」とし，数学的な見方・考え方を「事象を数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え，論理的，統合的・発展的に考えること」としている[2]。これについて，中央教育審議会教育課程部会算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめ（平成28年）では，図１のように表している。

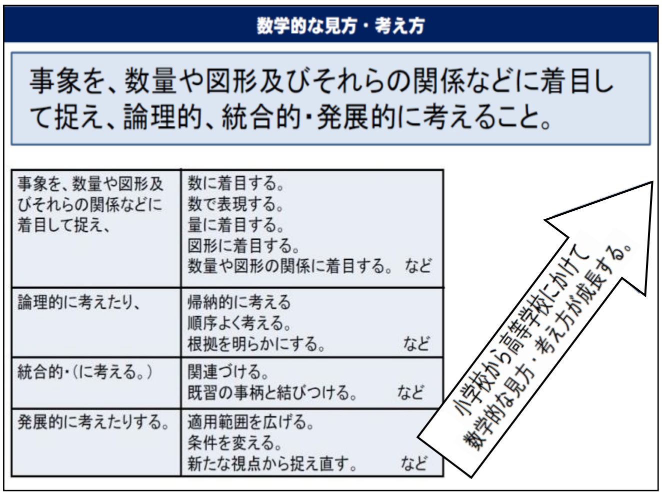



図１　数学的な見方・考え方とその具体的な視点[(1)]

図１では，「数学的な見方」と「数学的な考え方」を明確に区別しているわけではないものの，先に述べた「数学的な見方」と「数学的な考え方」を照らし合わせれば，図１の下の表の上部（「着目して捉え，」に関わるところ）と下部がそれぞれ「数学的な見方」と「数学的な考え方」に対応していると言える。また，表の右側部分にはそれらの具体的な視点（「～など」の表現）も挙げられている。数学の学習過程においてこれらの視点を生徒が働かせていく学習場面を設定する必要があると言える。ただし，阿部好貴・早田透・石井英真（2019）によると，「数学的な見方・考え方というものは，まさに『見方・考え方』であるために，一朝一夕で身に付くものでもない」「数学的な見方・考え方は，各学校で学び終えたときに身に付いていることが期待されるもの」[3)]と述べていることに留意すれば，数学的な見方・考え方は「このように見なさい」「このように考えなさい」と教師が指導して身に付けさせるようなものではなく，図１矢印中に示されるように，小学校から高等学校までの学習を通じて，新たに獲得したり，徐々に成長したりするものと捉えておく必要があるだろう。また，阿部らは数学的な見方・考え方を育成することについて，「一方に目標を据え置きながら，生徒が今有している見方・考え方を顕在化させ，評価し，発展させ，徐々に目標とする『見方・考え方』を養うことしかできない」[4)]とも述べている。

これらのことから，生徒が今有している数学的な見方・考え方とこれから新たに獲得したり，成長させたりする数学的な見方・考え方を踏まえた上で，個々の単元や授業における活動を組織していくことが重要になると考える。

**(2)　数学的な見方・考え方と数学的活動**

生徒が働かせている数学的な見方・考え方を顕在化させるためには，個々の生徒が行う観察可能な何らかの行為を，数学的な見方・考え方を働かせているものとして可視化して読み取る必要がある。つまり，数学的な見方・考え方は問題を解決する中で数学的活動として観察していくことが重要となる。「29年解説」には数学的活動を「事象を数理的に捉え，数学の問題を見いだし，問題を自立的，協働的に解決する過程を遂行すること」[5)]として，図２のように問題発見・解決の過程のイメージを挙げている。

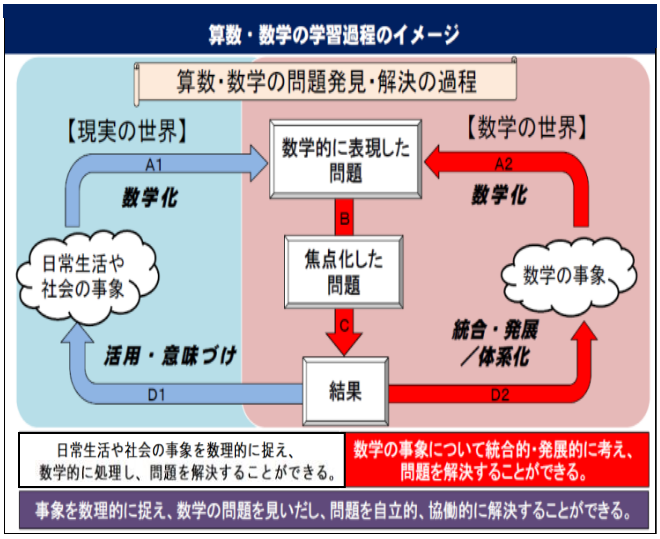



図２　数学的活動における問題発見・解決の過程[5)]

この学習過程におけるＡ～Ｄの各過程において生徒の数学的な見方・考え方を働かせ，数学的に考える資質・能力を育成させていく必要がある。Ａ～Ｄのどの過程においても数学的な見方・考え方は働かせられるものであるが，特にＡ，Ｄは数学的な見方・考え方を豊かにするために重要な過程になると考える。例えば，図２におけるＡ２には，「数学の事象の数学化は，数学的な見方・考え方を働かせ，数量や図形及びそれらの関係などに着目し，観察や操作，実験などの活動を通して，一般的に成り立ちそうな事柄を予想することである。」[6)]とある。そして，この予想した事柄に関する問いが「数学的に表現した問題」とされており，「数学的に表現した問題」そのものを生徒が設定していくことが数学的な見方・考え方を働かせるために重要だと捉えられる。本研究では，あらかじめ設定された「数学的に表現した問題」に取り組むだけでなく，生徒自身が数学的な見方・考え方を働かせ課題を見いだすことができるような問題設定を検討していく。

## ２　「異なる予想」が生じるような問題と働かせたい数学的な見方・考え方

### ⑴　「予想」を取り入れた学習指導

「29年解説」では，柱書の冒頭に数学的な見方・考え方を働かせとあるが，今回の改訂では図２のＤ２にあるように，結果を振り返って統合的・発展的に考察することが重視されている。例えば，図２のＡ２で数学の事象から一般的に成り立ちそうな事柄を予想する際，その予想が多様であればあるほど，生徒の知的好奇心は高まり，図２のＤ２で統合的・発展的に考える学習の契機につながると考える。

相馬一彦（2013）は，数学教育における「予想」の意味を，「問題の結果や考え方について見当をつけること」[7)]と述べており，その意義として思考の幅を広げることなどを挙げている。つまり，生徒が事象から一般的に成り立ちそうなことを予想していくことは，数学的な見方・考え方を働かせたり，成長させたりすることにつながると捉えることができるだろう。相馬（2013）は，予想をする際に次の点について留意する必要があると述べている。

- ●同じ予想ならば，「おや？」という気持ちは生まれにくい。
- ●生徒が予想したことが明らかに正しいと思われることに対して，証明に対する意欲や証明ができた充実感はあまり感じられない。
- ●問題に対する答え（予想）は，必ずしも正確である必要はない。
- ●自分と他人の予想が異なるとき，「どちらが正しいのか」ということに関心をもち，その理由を考えようとする。

このことから生徒に予想をさせる際，「それが正確でないものやそれが一般的には成り立つとは言えないものも含まれる多様な考え（以下，『異なる予想』とする）」が生じるような場面を検討していく必要があると言える。数学的な見方・考え方を働かせながら「異なる予想」を出したり，それが一般的に成り立つのかを調べたりする際に，生徒は様々な数学的な見方・考え方を育んでいくものと考える。

### ⑵　「異なる予想」が生じるような問題と働かせたい数学的な見方・考え方

「異なる予想」が生じるような問題場面を検討し，その問題に取り組ませた際に働かせたい数学的な見方・考え方を具体化していく。本研究では，「異なる予想」が生じるような問題（以下「本問題」とする。）を，中学校第２学年「数と式」領域の単元「文字式の利用」で検討していく。具体的には，「17段目のふしぎ」（藤井，平成27年）を参考にし，「本問題」を開発する。本単元での学習を通して育みたい数学的な見方・考え方に「具体的な（数学の）事象の中に数量の関係を見いだし，それを文字を用いて式に表現したり式の意味を読み取ったりすること」が挙げられる。本単元の学習以前には中学校第１学年で文字と式など，文字を使って問題を解決する経験はあるものの，「文字式を用いて説明する」という考えは生徒にとっては初めてである。生徒が学習を通して「文字式を用いて説明する」ことのよさや必然性に気付くために，単元の導入で「本問題」に取り組む。この際，生徒が今有している数学的な見方・考え方を働かせ「異なる予想」を出していくことで，数学的に表現した問題としての命題の真偽を調べたいという生徒の知的好奇心を高め，数学的な見方・考え方を育むことにつながると考える。

「異なる予想」を生じさせるために，問題の提示の仕方についても工夫する。教科書では17段目の結果に着目させるために17段目までしか計算させていないが，「本問題」では20段目まで計算させる（図３：なお，「本問題」では，段を列として表記している）。このことにより，完成させた表（数学の事象）から生徒の「異なる予想」を引き出していけると考える。生徒から出された「異なる予想」を命題として数学的に表現させ，その予想が「いつでも成り立つのか？」ということを問いかけていく。

①下の表をモニターに提示する。

| 1列 | 2列 | 3列 | 4列 | 5列 | 6列 | 7列 | 8列 | 9列 | 10列 | 11列 | 12列 | 13列 | 14列 | 15列 | 16列 | 17列 | 18列 | 19列 | 20列 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

②１列目に自分が考える好きな４つの数を書く。

③２列目に自分が考える好きな４つの同じ数を書く。

④１列目と２列目の各行の数の和を求め，その和における一の位の数字を３列目に書く。

⑤２列目と３列目の各行の数の和を求め，その和における一の位の数字を４列目に書く。

⑥以下20列目までこの操作を繰り返す。

⑦表から予想できることを考える。

図３　「本問題」を提示する流れ

完成した表を基に，生徒が一般的に成り立つことを予想する際に働かせたい数学的な見方・考え方を図４に示す。ここでは，働かせたい数学的な見方・考え方とそれに対応した具体的な反応例を示している。

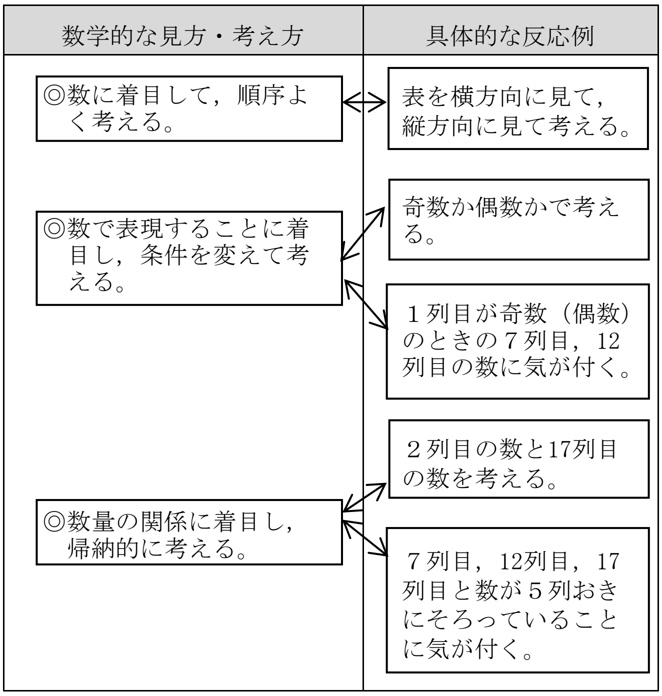



**図４　完成した表から一般的に成り立つことを予想する際に働かせたい数学的な見方・考え方と具体的な反応例**

図５は，図４で示した「予想」が一般的に成り立つことを説明する際に働かせたい数学的な見方・考え方を表しているが，ここでは，働かせたい数学的な見方・考え方と，それに対応した具体的な反応例を挙げた上で，特に，で囲まれた数学的な見方・考え方及び具体的な反応例を，この単元を通して特に育みたい数学的な見方・考え方として設定する。

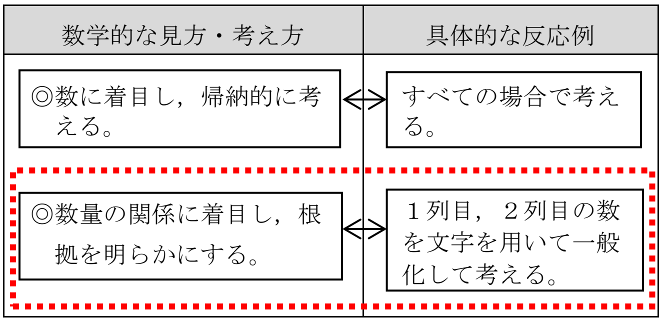



**図５　「予想」が一般的に成り立つことを説明する際に働かせたい数学的な見方・考え方と具体的な反応例及び，単元を通して特に育みたい数学的な見方・考え方**

## Ⅲ　研究の仮説及び検証の視点と方法

### １　研究の仮説

「異なる予想」が生じるような問題に取り組む活動を行えば，数学的な見方・考え方を働かせることができるであろう。

### ２　検証の視点と方法

検証の視点と方法について，表２に示す。

**表２　検証の視点と方法**

| 検証の視点 | 検証の方法 |
| --- | --- |
| 「異なる予想」が生じるような問題に取り組む活動は，数学的な見方・考え方を働かせることに有効であったか。 | ・授業の分析<br>・プレ，ポストテスト |

## Ⅳ　授業の分析と考察

### １　授業実践

#### (1) 授業計画

本単元における授業計画を表３に示す。

**表３　授業計画**

| | | |
| --- | --- | --- |
| 期　間 | | 令和元年６月14日～令和元年６月20日 |
| 対　象 | | 所属校第２学年（１学級22人） |
| 単元名 | | 文字式の利用 |
| 単元の目　標 | | 具体的な事象の中に数量の関係を見いだし，それを文字を用いて式に表現したり式の意味を読み取ったりすることにより，数量の関係を文字式を用いて説明することができる。 |
| 単元指導計画 | 第１時<br>第２時 | 「本問題」（20列目までの数） |
| | 第３時 | 連続する３つの整数の和 |
| | 第４時 | ２けたの自然数と，その十の位と一の位を入れかえた２けたの自然数の和や差 |

#### (2) 授業の実際

第１時では，授業のはじめに20列目までの数の計算をさせ，完成した表からいつでも成り立ちそうだと考えられるものを自由に見付けさせた。生徒からは，表現が不十分なものも含めて「異なる予想」が出された。中には，二つ以上の考えを出している生徒も見られた。

完成した表からいつでも成り立ちそうなこととして生徒が考えた代表的なものを表４に示す。

**表４　完成した表からいつでも成り立ちそうだと生徒が考えた「異なる予想」の代表的なもの**

| | 生徒が考えた「異なる予想」 |
|---|---|
| 1 | 17列目の数がそろう。 |
| 2 | ７列目，12列目，17列目に同じ数がならぶ。 |
| 3 | 19列目と20列目の数をたしたら１列目の数になる。 |
| 4 | ２列目の数が偶数のとき，17列目の数は２列目の数の２倍になっている。 |
| 5 | １列目に同じ数を書いたら20列目まで数がすべて同じになる。 |

表４1，2については教師の方で生徒から出てくると期待していたものであったが，表４3～5に示すような生徒の考えは，事前に予測はしていなかった。

次に図６は，表４3と答えた生徒Ａの計算結果の表である。

| 1列 | 2列 | 3列 | 4列 | 5列 | 6列 | 7列 | 8列 | 9列 | 10列 | 11列 | 12列 | 13列 | 14列 | 15列 | 16列 | 17列 | 18列 | 19列 | 20列 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 8 | 8 | 6 | 4 | 0 | 4 | 4 | 8 | 2 | 0 | 2 | 2 | 4 | 6 | 0 | 6 | 6 | 2 | 8 |
| 6 | 8 | 4 | 2 | 6 | 8 | 4 | 2 | 6 | 8 | 4 | 2 | 6 | 8 | 4 | 2 | 6 | 8 | 4 | 2 |
| 1 | 8 | 9 | 7 | 6 | 3 | 9 | 2 | 1 | 3 | 4 | 7 | 1 | 8 | 9 | 7 | 6 | 3 | 9 | 2 |
| 5 | 8 | 3 | 1 | 4 | 5 | 9 | 4 | 3 | 7 | 0 | 7 | 7 | 4 | 1 | 5 | 6 | 1 | 7 | 8 |

| 1列 | 2列 | 3列 | 4列 | 5列 | 6列 | 7列 | 8列 | 9列 | 10列 | 11列 | 12列 | 13列 | 14列 | 15列 | 16列 | 17列 | 18列 | 19列 | 20列 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 5 | 9 | 4 | 3 | 7 | 0 | 7 | 7 | 4 | 1 | 5 | 6 | 1 | 7 | 8 | 5 | 3 | 8 |
| 2 | 4 | 6 | 0 | 6 | 6 | 2 | 8 | 0 | 8 | 8 | 6 | 4 | 0 | 4 | 4 | 8 | 2 | 0 | 2 |
| 3 | 4 | 7 | 1 | 8 | 9 | 7 | 6 | 3 | 9 | 2 | 1 | 3 | 4 | 7 | 1 | 8 | 9 | 7 | 6 |
| 4 | 4 | 8 | 2 | 0 | 2 | 2 | 4 | 6 | 0 | 6 | 6 | 2 | 8 | 0 | 8 | 8 | 6 | 4 | 0 |

**図６　生徒Ａの計算結果の表**

この生徒は，表４3の自分の考えについて二つの計算結果から「いつでも言えること」として理解していたが，実際には２列目の数が偶数のときにだけ成り立つことであった。授業では，自分の考えたことについて班で交流を行った。生徒Ａは自分の考えを班員に説明する中で，それがいつでも成り立つことではないことに気が付いた。それと同時に「どうしてなのか？」という疑問も生まれていた。

班で交流した後に，各班から一般的に成り立ちそうなことを発表させ，全体で共有していく中で表４1及び4について調べていくことになった。表４1については一番多くの生徒が予想していたものであり，表４4については少数意見ではあったが全体で共有する場面で生徒の興味が高まったため，この二つを取り上げることとした。

この二つの生徒の考えについて具体的な例をいくつか確認した後，「このことはいつでも言えるのだろうか？」と問うてみたが，生徒は「（成り立っているのだから）いつでも言えるのではないか」という反応であった。教師は「いつでも言えるかどうかは分からない」という反応が出てくることを期待していたが，多くの生徒はいくつかの具体例で成り立ってさえいれば，一般的にも成り立つものと考えているようであった。続けて教師から「これで全部調べたことになるのだろうか？」と告げた上で，「いつでも言えることを説明するにはどうすればよいか？」と再度問うてみた。しかし，この問いに対しても，生徒から「文字を使えばよい」などの反応は特に見られなかった。時間の関係もあり，最終的には，教師の方から「文字を使って説明していくことが考えられないか？」ということを説明する形になった。数学的な見方・考え方を働かせ完成させた表（数学の事象）から一般的に成り立ちそうなことを予想することができても，それが「いつでも」成り立つということを説明する必要性を十分に感じられていないことが分かる。

第２時では，当初は表４1「17列目の数がそろう。」ことを題材として扱うことを考えていたが，第１時で生徒から「異なる予想」が出されたことから表４4「２列目の数が偶数のとき，17列目の数は２列目の数の２倍になっている。」ことを題材として扱うことにした。導入では表４4の考えについての学級全体への理解を図るため，第１時の作業の２列目の数を偶数に設定し全員に計算をさせた。この際，生徒Ｂが誤って２列目の数を奇数として計算したところ，17列目が２列目の２倍になっていないことに気が付いた。図７は生徒Ｂが２列目の数を７として計算した結果の表である。

| 1列 | 2列 | 3列 | 4列 | 5列 | 6列 | 7列 | 8列 | 9列 | 10列 | 11列 | 12列 | 13列 | 14列 | 15列 | 16列 | 17列 | 18列 | 19列 | 20列 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 7 | 7 | 4 | 1 | 5 | 6 | 1 | 7 | 8 | 5 | 3 | 8 | 1 | 9 | 0 | 9 | 9 | 8 | 7 |
| 7 | 7 | 4 | 1 | 5 | 6 | 1 | 7 | 8 | 5 | 3 | 8 | 1 | 9 | 0 | 9 | 9 | 8 | 7 | 5 |
| 0 | 7 | 7 | 4 | 1 | 5 | 6 | 1 | 7 | 8 | 5 | 3 | 8 | 1 | 9 | 0 | 9 | 9 | 8 | 7 |
| 1 | 7 | 8 | 5 | 3 | 8 | 1 | 9 | 0 | 9 | 9 | 8 | 7 | 5 | 2 | 7 | 9 | 6 | 5 | 1 |

**図７　生徒Ｂが２列目の数を７として計算した結果の表**

このことから，何人かの生徒は２列目と17列目の数に着目し，「２列目の数が奇数のときは，17列目の数は２列目の数の２倍ではなく７倍になる」ことに気が付いた。この考えを全体で共有した後に，２列目の数が偶数，奇数に関係なくどんな数のときでも「17列目の数は２列目の数の７倍になっているのだろうか」と問うてみた後に，これらの予想が正しいのかどうかについて，文字を用いて考えていくことを告げた。１列目と２列目の数を文字で表すため，１列目をｎ，χ，ｙ，ｔ，２列目をすべてｐにすることを生徒に決めさせ，８列目までの計算を全体指導で説明し，残りについては個人作業とした。実際

に文字を用いて計算させていくと図８に示すような表になる。

| 1列 | 2列 | 3列 | 4列 | 5列 | 6列 | 7列 | 8列 | 16列 | 17列 | 18列 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | p | n+p | n+2p | 2n+3p | 3n+5p | 5n+8p | 8n+13p | 377n+610p | 610n+987p | 987n+1597p |
| x | p | x+p | x+2p | 2x+3p | 3x+5p | 5x+8p | 8x+13p | 377x+610p | 610x+987p | 987x+1597p |
| y | p | y+p | y+2p | 2y+3p | 3y+5p | 5y+8p | 8y+13p | 377y+610p | 610y+987p | 987y+1597p |
| t | p | t+p | t+2p | 2t+3p | 3t+5p | 5t+8p | 8t+13p | 377t+610p | 610t+987p | 987t+1597p |

図８　文字を用いた計算の実際

文字式の計算が煩雑になることと，「本問題」は計算結果の一の位に着目させることをねらいとしていたため，教師の方で生徒に２列目と17列目が比較しやすいように,文字の係数が２桁になった場合は,一の位の数だけを表現するように指示をし，表を作らせた（図９）。

| 1列 | 2列 | 3列 | 4列 | 5列 | 6列 | 7列 | 8列 | 9列 | 10列 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| n | P | n+P | n+2P | 2n+3P | 3n+5P | 5n+8P | 8n+3P | 3n+1P | 1n+4P |
| x | P | x+P | x+2P | 2x+3P | 3x+5P | 5x+8P | 8x+3P | 3x+1P | 1x+4P |
| y | P | y+P | y+2P | 2y+3P | 3y+5P | 5y+8P | 8y+8P | 3y+1P | 1y+4P |
| t(大) | P | t+P | t+2P | 2t+3P | 3t+5P | 5t+8P | 8大+8P | 3大+1P | 1大+4P |

| 11列 | 12列 | 13列 | 14列 | 15列 | 16列 | 17列 | 18列 | 19列 | 20列 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4n+5P | 5n+9P | 9n+4P | 4n+3P | 3n+7P | 7n+0 | 0+7P | 7n+7P | 7n+4P | 4n+1P |
| 4x+5P | 5x+9P | 9x+4P | 4x+3P | 3x+7P | 7x+0 | 0+7P | 7x+7P | 7x+4P | 4x+1P |
| 4y+5P | 5y+9P | 9y+4P | 4y+3P | 3y+7P | 7y+0 | 0+7P | 7y+7P | 7y+4P | 4n+1P |
| 4大+5P | 5大+9P | 9大+4P | 4大+3P | 3大+7P | 7大+0 | 0+7P | 7大+7P | 7大+4P | 4大+1P |

図９　生徒が文字を用いて計算した表

計算に多くの時間がかかってしまい，個人や班で考える時間が確保できなかったため，完成した表から17列目の数が２列目の数の７倍になることについては17列目の７ｐと２列目のｐを比較しながら全体で確認した。またこの文字で表した結果から，２列目が偶数になっている場合は17列目が２列目の２倍になっていることも説明したが，文字式が複雑であったため生徒は十分に理解できなかったようであった。授業の振り返りの中には，「17列目の数が２列目の数の７倍になることがいつでも言えることが分かった」と述べるとともに，文字を使うことの有用性に気が付いた記述もあった。

第３時，第４時では，数の性質について文字式を利用して説明する他の問題を扱った。どちらも「事象から分かることを予想」し，「その予想がいつでも成り立つ」ことを説明するものであった（表５）。

表５　第３時，第４時で扱った問題

| 時 | 問題 |
|---|---|
| 3 | 連続する３つの整数の和から言えることは何か？ |
| 4 | ２けたの自然数と，その数の十の位と一の位の数を入れかえた２けたの自然数の和から言えることは何か？ |

## ２　プレテスト，ポストテストの分析

プレ，ポストテストは，本単元での学習を通して特に育みたい数学的な見方・考え方を働かせられるかどうかを見取るものとした。プレテストは本単元に入る前に，ポストテスト1，2は本単元終了後に実施した。プレテストとポストテスト1は本研究で扱う領域「数と式」について，ポストテスト2は単元を領域「図形」に変えたものについて，数学的な見方・考え方を働かせることができたかについて検証した（図10）。

【プレテスト】

(1)図のような九九の表において，横に並ぶ３つの数について，その和はどんな数になると予想しますか。

|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

例　4+6+8，18+21+24，63+72+81

(2)(1)になることを説明しなさい。

【ポストテスト1】

(1)連続する５つの整数の和はどんな数になると予想しますか。

(2)(1)になることを説明しなさい。

【ポストテスト2】

長方形がある。この長方形のたてを２倍,横を1/2倍にします。

(1)２つの長方形の面積の関係はどうなると予想しますか。

(2)(1)になることを説明しなさい。

図10　プレテストとポストテスト1，2

各テストの(２)では，「自ら見いだした予想について,その予想が成り立つ理由を説明することを『数学的な見方・考え方』を働かせて文字式を用いて説明する」ことができたかどうかで評価した(表６)。

表６　各テストの（２）の結果（人）

| 自ら見いだした予想について，その予想が成り立つ理由を説明すること | プレテスト | ポストテスト1 | ポストテスト2 |
|---|---|---|---|
| 文字式を用いて表現することができ，説明もできている。 | 1 | 7 | 2 |
| 文字式を用いて表現することはできているが，説明が十分でない。 | 0 | 6 | 1 |
| 文字式を用いているが,表現が十分でない。 | 0 | 6 | 3 |
| 文字式を用いていない。 | 11 | 1 | 12 |
| 無解答 | 10 | 2 | 4 |
| 合計 | 22 | 22 | 22 |

表６から，文字を用いて表現することができている生徒はプレテストからポストテスト1で12名の増加が見られたものの，領域を「図形」に変えたポ

ストテスト2になると，そのうちの７名の生徒からは文字式を用いた表現は見られなかった。生徒Ｃ，Ｄの記述を図11に示す。

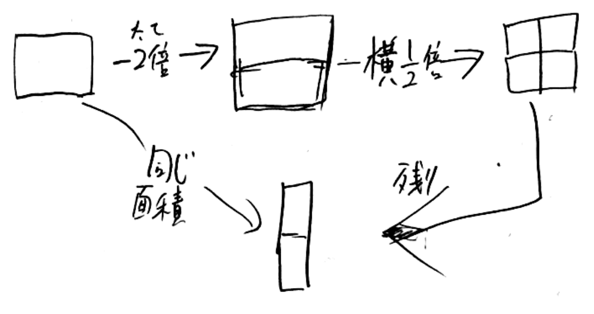
| | |
|---|---|
| 生徒Ｃ |  |
| 生徒Ｄ | 比例するのは、縦と横をどちらも2倍、3倍，4倍…としたときだけで。縦だけ2倍して、横は$\frac{1}{2}$倍するだけだと、面積は変わらないから<br>縦が4cm横が8と考えると、<br>ふつう… 4×8=32となり、2倍と$\frac{1}{2}$倍すると<br>×2↓ ↓×$\frac{1}{2}$<br>8×4=32となり、面積はかわらないから、 |

**図11　生徒Ｃと生徒Ｄのポストテスト2の（２）の記述**

ポストテスト1では，授業で扱った単元と同じ領域ということから，言葉で説明する部分に一部誤りがあるものの，文字式を用いた説明として生徒Ｃ，Ｄともに正しく記述できていた。しかし，授業で扱った単元とは異なる「図形」領域の問題では，生徒Ｃと生徒Ｄのどちらの解答にも文字式を用いた説明はされていなかった。文字を用いる場合は，元の長方形の縦の長さを$\chi$cm，横の長さをｙcmとおいて考えるものではあるが，生徒Ｃ，Ｄは直観的に図形を用いたり具体例を示したりして説明しようとしていることが分かる。また，ポストテスト2で文字式を用いてはいるものの，説明が十分ではなかった生徒Ｅのポストテスト2の記述（図12）を示す。

| | |
|---|---|
| 生徒Ｅ | 長方形のたてを2倍、横を$\frac{1}{2}$倍すると<br>2x・$\frac{1}{2}$yと表すことができる。その和は.<br>2x×$\frac{1}{2}$y=xy<br>=1(x×y).<br>(x×y)は整数だから1(x×y)は1の倍数になる<br>したがって長方形の面積の関係は1の倍数である。 |

**図12　生徒Ｅのポストテスト2の（２）の記述**

生徒Ｅの解答には，「～は整数だから，～の倍数になる」という表現が用いられていることから，「図形」領域であっても，本単元で扱った文字式の表現方法を用いて解決しようとしていることが分かる。

次に，プレテスト，ポストテスト1，2すべてで文字式を用いて表現することができている生徒Ｆのプレテスト，ポストテスト1及び2の記述（図13）を示す。

| | |
|---|---|
| プレテスト | 真ん中の数をnとする。<br>左に1つずれたときの数＋右に1つずれたときの数＝0になる。<br>だから、3つの並んだ数の平均は、<br>真ん中になる。<br>nは必ず整数だから、<br>3をかけて3nになるから3の倍数になる。 |
| ポストテスト1 | 連続する5つの整数のも、とも小さい数をnとすると、<br>連続する5つの整数は、n, n+1, n+2, n+3, n+4と表すことができます。<br>その和は、n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+(n+4)<br>=n+n+1+n+2+n+3+n+4<br>=5n+10<br>=5(n+2)です。<br>(n+2)は整数で、5がかけられています。<br>したがって、連続する5つの整数の和は、<br>5の倍数になります。 |
| ポストテスト2 | まず<br>たての長さをx、横の長さをyとし、たてを2倍したから2xに、横の長さは$\frac{1}{2}$倍しているので、$\frac{1}{2}$yと表せます。<br>長方形の面積は、たての長さと横の長さをかけると、求めることができるで、2xと$\frac{1}{2}$yをかけます。<br>そうすると、2x×$\frac{1}{2}$y=xyとなり、2つ目の面積は1つ目と変わりません。<br>したがって、長方形のたての長さを2倍しても、<br>その逆数が横の長さにかけられているので、<br>1つ目の面積と、2つの目の面積は同じです。 |

**図13　生徒Ｆのプレ，ポストテスト1及び2の（２）の記述**

生徒Ｆの記述状況から，プレテストからポストテストへの記述の質が高まったことが読み取れる。生徒Ｆは，第１時の「異なる予想」を考える場面では予想を二つ考え，授業における班の話合いで積極的に自分の考えを述べていた。そして，表４4について全体で共有する場面で積極的に発言することで，他の生徒の興味や関心を高めていた。

### ３　考察

授業及びプレ，ポストテストの分析を通して次の２点が明らかになった。

**●　「異なる予想」が生じるような問題に取り組む活動は，生徒の数学的な見方・考え方を働かせることに有効であること。**

第１時に完成させた表からいつでも成り立ちそうなことを予想する際，表４のように生徒は数学的な見方・考え方を働かせ多様な考えを出していた。特に，表４$\boxed{3}$に示した生徒の考えは時間の関係上授業では十分に扱えなかったものの，自分自身で発見したことについて教師からフィードバックをしていくことにより学習意欲が高まり，命題が偽となる場合に必要となる反例の理解なども進むと考えられた。また，表４$\boxed{4}$の予想については授業クラスで実際に扱ったものであるが，この予想では２列目が偶数の場合には17列目の数が２列目の数の２倍になるものの，偶奇どちらでも一般的に成り立つのは２列目の数の７倍であるという，生徒の予想が統合的・発展的に考察すること，また，本単元の目標である「文字式を使って説明する」という論証の必要性にもつながっていくと考えられた。このような考え方は，単に「17列目の数はどうなっているだろうか？」という形で問題を提示しても出現しない可能性が高く，「本問題」のように問題の条件を弛めることは生徒に「異なる予想」を生じさせ，数学的な見方・考え方を働かせることに有効であると考える。

**●　数学的な見方・考え方を育んでいくためには，単元の指導計画及び生徒の数学的な見方・考え方を働かせていく学習指導についての長期的な視点が重要であること。**

「異なる予想」が生じるような問題を取り組むに当たり生徒は数学的な見方・考え方を働かせ，多様な考えを出したものの，本単元での学習を通して育みたい「文字式を使って考える」ことへの意識については十分には高められなかった。その理由として，Ⅳ１（２）で述べたように，これらの「異なる予想」が「いつでも成り立つ」ことを説明するために文字式を用いる必要性を十分に感じていなかったことが挙げられる。本研究では，単元の導入において「本問題」を扱ったが，文字式を用いて説明する問題にある程度習熟させた上で「本問題」を扱うことによりその意識も高められる可能性があると考える。

また，表６のポストテスト$\boxed{2}$の結果などから，問題提示の仕方が変わると学習内容を活用できていないことや，図13で示した生徒の記述のように問うている領域が変わっても本単元で学習した内容をそのままの形で活用しているものも見られた。ある単元で指導したからとはいえ，育みたい数学的な見方・考え方が身に付くものとは言えないことが分かる。

このことから，数学的な見方・考え方は，学年や学校段階などの長期的な視点に立った上で，繰り返し働かせながら育むことが重要であると考える。

## Ⅴ　研究のまとめ

### １　研究の成果

中学校第２学年の単元「文字式の利用」において，教科書の巻末に掲載されている問題を参考に，その問題の条件を弛めたものを取り組ませることにより，生徒に「異なる予想」を生じさせることができた。そして，その問題を単元の導入において取り組ませる活動は，生徒の数学的な見方・考え方を働かせる学習指導に有効であることが分かった。

### ２　今後の課題

生徒が出した予想について，文字式を利用して説明することは実際には難しく，教師主導の形になってしまった。生徒の状況によっては，挙げた予想が一般的に成り立つのかどうかという課題意識をもたせた状態で，第３時，第４時のような比較的容易に考えることができる問題を扱った上で，再度第２時に挙げた予想について説明させていく方法も考えられた。これらのことを踏まえ，単元の指導計画を検討していく必要がある。

また，他の単元においても「異なる予想」が出るような問題を開発し，授業実践を重ねていくことが重要である。

**【注】**

(1) 文部科学省（平成28年）：「算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめ」を参照されたい。

**【引用文献】**

1)　文部科学省（平成30年）：『中学校学習指導要領（平成29年告示）解説数学編』日本文教出版株式会社p. 20
2)　文部科学省（平成30年）：前掲書p. 21
3)　阿部好貴・早田透・石井英真（2019）：「数学的な見方・考え方と評価」岩崎秀樹・溝口達也『新しい数学教育の理論と実践』ミネルヴァ書房p. 45
4)　阿部好貴・早田透・石井英真（2019）：前掲書p. 46
5)　文部科学省（平成30年）：前掲書p. 23
6)　文部科学省（平成30年）：前掲書p. 24
7)　相馬一彦（2013）：『予想で変わる数学の授業』明治図書出版株式会社p. 20

**【参考文献】**

藤井斉亮（平成27年）：『新編新しい数学２』東京書籍株式会社
相馬一彦（2013）：『予想で変わる数学の授業』明治図書出版株式会社