

数学科における記号的表現への理解を深める指導の工夫 — デジタル機器を活用し、様々な数学的表現を関連付ける活動を通して —

廿日市市立七尾中学校 久保 州司

研究の要約

本研究は、デジタル機器を活用し、様々な数学的表現を関連付ける活動を通して、記号的表現への理解を深める指導の工夫について考察したものである。文献研究から、記号的表現への理解を深めるには、記号や式を図的表現や操作的表現など他の数学的表現と関連付けて考える活動を通し、生徒の既存の概念構造と結び付けて解釈することが必要となることが分かった。そこで、式の変形の意味を図と関連付け、既習の知識と結び付けて理解するために、GeoGebraやGoogleスライドを活用し、記号の意味や式が表すことを正確な図に変換し、画面上で図を操作することで、式の意味や記号が表している関係を見だし、読み取ったことを言語的表現や記号的表現へ変換する授業を実践した。中学校第3学年「数と式」領域の「平方根」の単元での学習指導の検証結果から、デジタル機器を活用し、図的表現や操作的表現など他の数学的表現を関連付けることが、記号的表現への理解を深めることに有効であることが分かった。

I 主題設定の理由

中学校学習指導要領（平成29年告示）解説数学編に、用語・記号の重要性について「用語・記号は、社会で共通に認められた内容を簡潔に表現し、それらを的確に用いることによって、思考が楽になり、コミュニケーションの効率性が高まる。」また、「記号は、抽象的で形式的であるだけに、操作がしやすく、しかも、より一般性をもっている。上手に記号体系を作ることにより、現実の意味を離れて形式的な操作が可能になり、思考を能率的に進めることができるようになる。」¹⁾と記されている。また、数学科の目標の中で、「基礎的な概念や原理・法則を理解するということは、数学の特質からみて、より進んだ知識や技能を生み出すこと、発展的に考えることを可能にする。」²⁾と述べられている。このことから、記号のもつ概念や原理・法則を理解し、事象を数学的な記号を使って表現（記号的表現）することが、新しい知識を深く理解する際に重要になってくる。

しかし、表1に示すように、令和2年度広島県公立高等学校選抜（Ⅱ）等一般学力検査、設問1（4）乗法公式を使って平方根を含む式の計算ができるか問う問題の正答率は66.4%と他の問題に比べ低くなっている。（3）の因数分解の問題のように、単純に公式に当てはめる問題には適切に答えることができるが、（4）のように平方根の計算を既習の知識と関連付けて発展的に考える問題については、適切に答

えることができていない状況がある。

表1 令和2年度一般学力検査正答率（設問1）⁽¹⁾

設問1	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
分類	正負の数	文字式	因数分解	平方根	二次方程式
正答率	92.3%	87.5%	85.4%	66.4%	72.9%

このことから、発展的に考える際に必要となる公式等、記号を使った表現への基本的な概念や原理・法則等への理解が十分でなく、記号的な表現への理解を深めることが重要であると考え本主題を設定した。

II 研究の基本的な考え方

1 記号的表現について

(1) 表現様式について

数学では言葉や数、式、図、表、グラフなどの様々な表現方法が用いられるが、個々の具体的な表現方法を図による表現、記号による表現等、ある観点から分類したとき、それらの類型を表現様式という。

中原忠男（1995）は次頁表2のように、表現様式を五つに分類し、数字、文字、演算記号、関係記号など数学的記号を用いた表現を記号的表現と定義し

た。記号的表現は、数と式、図形、関数、データの活用の四つの領域で多様なものが用いられている。

そして、現実的表現から記号的表現へ向かって抽象性が上がり、記号的な表現を活用することで、概念を形成したり、表現したりすることができることから、中原（1995）は五つの表現様式の中で記号的表現が最も高度な表現であり、それを活用できるようになることを、算数・数学科の授業の最終的な指導目標の一つと考えている⁽²⁾。

表2 表現様式の分類（中原 1995）

現実的表現	実世界の状況，実物による表現。	
操作的表現	具体的な操作的活動による表現。	
図的表現	絵，図，グラフによる表現。	
言語的表現	各国の日常言語を用いた表現。またはその省略的表現。	
記号的表現	数字，文字，演算記号，関係記号など数学的記号を用いた表現。	

(2) 記号的表現の特性と役割⁽³⁾

記号的表現の特性について、中原（1995）は生成過程（つくられていく過程）と生成結果（つくりだされた記号的表現）に着目し次のようにまとめた。

まず生成過程では、記号的表現の多くは言語の省略化を経て完成されてきており、表し方や使用方法が明確に定められており、一定の規約に基づいて構成されている。そして、図1のように、同じ記号に対しても相対的な位置によって異なる意味が与えられるなど、記号的表現には少ない記号で、多様な内容を、簡潔明瞭に表すことができるよさがある。

「2」はいずれも左側に位置しているが、右側の記号との相対的な位置関係から、すべて異なる意味をもっている。

$$23, \quad 2\frac{1}{2}, \quad 2a$$

図1 異なる意味をもつ例（中原 1995）

そして、記号的表現では、 $(-2) + (+3)$ を括弧と正の符号を省略し、 $-2+3$ と表すように、一定の規約に従ってある記号を省略したり、柱体の体積を V 、

高さを h とするとき、底面積を求める式を S と置き換えることで、体積を求める公式を $V = S h$ と一般的に表すように、他の記号で置き換えたりできる。また、同じ数や文字の積では、指数を用いて、累乗の形で表すなど、新しい記号を定義することで、より簡単な表現で表すことができる。

次に生成結果では、記号的表現は、初めは数学の手段として創りだされてきたが、それ自体の性質が考察や研究の対象となり、重要な性質（公式等）が導き出されるという特性（対象性）を持っている。また、記号的表現（とりわけ式）は目的に応じて適宜変形することができるなど操作性がある。さらに式の形に着目することで数量の関係が分かったり、様々な事柄に分類できたりするなど、記号的表現には形式性があり、その表現の形式が重視され、それが判断や考察の対象となる。また、式の計算や方程式の解法の際にみられるように、内容を離れて、形式的な変形、操作が行われるなど、記号的表現の特性の一つである形式性にはよさがある。

また中原（1995）は、記号的表現の役割について次のようにまとめている。

まず一般的な役割として、A 数学的な情報に関するコミュニケーションの促進、B 数学的な情報に関する思考の促進、という2点がある。

次に固有の役割として、①数学的情報を簡潔、明瞭、厳密に表現する、②数学的情報の抽象、一般化を可能にする、③数学的情報に関わる反省的な思考を促進する、④数学的情報の形式的処理、操作の自動化を可能とする、ことの4点がある。

一般的な役割である数学的な情報に関する思考の促進については、これまでも重視されてきたことであるが、主体的・対話的で深い学びが求められることから、その役割はさらに重要性を増していく方向にある。このことから、記号的表現を理解し、活用することが重要であると考えられる。

2 記号的表現への理解を深めることについて

(1) 記号的表現の理解について

記号的表現の指導において、その記号への理解を図ることが重要となってくるが、生徒は図2のように間違ってしまうことがある。このことについて、中原（1995）は、既習の数学の知識を適切に使えないことから起こる記号操作の誤りであると唱え、子供たち自身がつくりだした記号操作の規則に従っていることが原因の一つであると考えた⁽⁴⁾。記号操作とは、「新しい記号法を、既習の記号的表現の中に位

置付け、それを操作したり、変形したりすること」である。

ア	$a(bc) = ab \cdot ac$
イ	$(a + b)^2 = a^2 + b^2$

図2 記号操作の誤りの例

具体的には、図2のアでは、分配法則で括弧の中の文字に括弧の外にある項 a をそれぞれにかけることができると考えた。また、図2のイでは括弧の中の項をそれぞれ2乗すればよいと生徒自身が考えてしまったことが原因の一つに挙げられる。

生徒は、授業等で、一つ一つの公式等を使う練習を行い、形式的に処理することができるようになっても、公式が成り立つ意味や概念まで十分に理解できていないことがある。そのため、新しい問題に出会ったとき、必要な既習の知識と適切に結び付けて考えられず、誤った知識を適用できると自分なりに考え、図2のような誤りをしてしまうと考える。

したがって、記号のもつ意味や概念、法則への理解を深めることが記号的表現への理解には重要になると考える。

(2) 記号的表現への理解を深めるとは

R.R.Skemp (1973) は「何かを理解するとは、それを適切なシエマのなかに同化することである。」³⁾と述べている。シエマとは心理学用語で、個人が保持している知識構造（同化と調節を行う人がその時点ですでにもっている知識の枠組み）という意味であり、同化とは、自分以外のもの（対象や環境）を自分の中に取り込む働きで、その際には対象を取り込みやすいように変化させることをいう。つまり、新しい知識を学ぶときに、その意味や成り立ちを考え自分の経験や知識をもとに考えることで、理解しやすいように解釈し、既にもっている知識の枠組みへ取り込むことが理解するということである。

また、梶田叡一 (2017) は「深い学び」とは「個々の学びをそれだけにとどめることなく、その学びの土台となるものに関連付けて学ぶと同時に、その成果がまたそこでの土台となるものを深め広げていく、といった学び、個々の学びが関連して広く深い理解に繋がっていくような学び」⁴⁾と述べている。つまり、これまで学んだ既習事項をバラバラに覚えているだけでなく、未知の状況に結び付け、自分で新しい知識を創造し、関連付けることが理解を深めることである。

そこで、本研究において、記号的表現への理解を深めるとは、「式など記号的表現を用いて表された関係について、一般化したり、発展的に考えたりすることで、その記号のもつ概念や原理・法則を導き、既有的知識と結び付けて構造化していくことである。」と定義する。

3 デジタル機器を活用することについて

(1) デジタル機器を活用することの有効性について

中央教育審議会答申（令和3年1月26日）には、「子供一人一人が自分のペースを大事にしながら共同で作成、編集等を行う活動や、多様な意見を共有しつつ合意形成を図る活動など『協働的な学び』もまた発展させることができる」⁵⁾とデジタル機器を活用する有用性について記されている。

授業において、デジタル機器を活用することで、条件にあてはまる図を提示し、点を動かすことで、いろいろな形に変形したり、グラフの形状を細かく正確に表示したりすることができる。このように、条件設定を自在に変えながら学習を進めることができるなど、学習効果を高められるよさがある。

さらに、様々な数学的表現で表す活動にデジタル機器の活用を考えることができる。活動の際に、中原 (1995) は「図的表現は教師が示すばかりではなく、子どもが自らつくりだし、活用していくようにすることも大切である。」⁶⁾「図的表現を用いる際には、それが表す内容や、子どもたちの状況などに基づいて、多様な表現方法を適切に活用していくこともまた重要である。」⁷⁾と述べている。その点において、動的数学ソフト (GeoGebra)、Googleスライドは生徒一人一人が各自の学習の状況に応じ、条件に合う図を表現することができる。そのため、操作を通し、意味や概念の理解に有効であると考えられる。

(2) 様々な数学的表現を関連付けることの意義

中原 (1995) は、「それぞれの表現様式が、子どもたちが数学的な概念や原理を構成する際に重要な役割をもっており、適切な表現方法を用いることで、子どもたちの誤りやつまずきの治癒的な指導を行うことが可能となる」、また、「授業で活用しようとする場合、ある表現様式から他の表現様式へと表し変えていくことが必要である」と考えた⁸⁾。中原は、他の表現様式へ表し変えることを翻訳と定義しているが、本研究では変換と表し、表2における五つの表現様式を数学的表現とする。

主税保徳 (2021) は、数学的表現の関連付けには

「個別の関連付け」と「相互の関連付け」があることを示し、数学的表現の関連付けは数理の獲得につながると述べている⁽⁶⁾。

そこで本研究では、記号的表現の指導において、記号や式を他の表現に変換し、操作を加えることにより得られた情報をもとの事象と関連付けて、一般化したり発展的に考えたりすることで、既存の知識と適切に結び付け、構造化していくことができると考えた。このように様々な数学的表現を相互に関連付け、生徒の既存の概念体系と適切に結び付ける活動を通して、記号的表現への理解を深めていく指導の工夫を考察する。

III 研究の仮説及び検証の視点と方法

1 研究の仮説

デジタル機器を活用し、様々な数学的表現を関連付ける活動を行えば、記号的表現への理解を深めることができるであろう。

2 検証の視点と方法

検証の視点と方法について、表3に示す。

表3 検証の視点と方法

検証の視点	検証の方法
デジタル機器の活用は、様々な数学的表現を関連付ける活動に有効であったか。	プレテスト・ポストテスト 生徒の Google スライドの記述内容 アンケート
様々な表現方法を関連付けることで、記号的表現への理解を深めることができたか。	

IV 研究授業について

1 研究授業の内容

- 期 間 令和3年6月10日～令和3年7月1日
- 対 象 所属校第3学年（4学級132名）
- 単元名 第2章 平方根
- 目 標

図的表現や操作的表現など様々な数学的表現を関連付けて考えることで、数の平方根を含む式の計算方法を既習の知識と結び付けて理解する。

2 研究授業の概要

表4は本研究に関わる単元計画である。具体的な

デジタル機器の活用方法を太線内に示す。

表4 デジタル機器の活用を取り入れた単元計画

時	学習活動
1	・ドット上の正方形の1辺の長さを調べる活動を通して、2乗すると2になる数の存在に気付く。 【デジタル機器の活用①】 ・GeoGebra で面積が2である正方形を描く。
2	・平方根の近似値を求める。
3	・平方根の大きさを比べ、不等号を使って表す。 【デジタル機器の活用②】 ・ $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ を表している長さを GeoGebra を活用して表現し、大小を比較する。
4	・有理数と無理数の意味及び数の範囲の広がりについて理解する。
5	・平方根の積と商のきまりを理解する。
6	・根号を含む式を、目的に応じて変形する。
7	・根号を含む式の乗法や除法の計算をする。
8	・小数点の位置に着目し、平方根の近似値を求める。
9	・根号の中が同じ数の和は、分配法則を使って簡単にできることを理解する。 【デジタル機器の活用③】 ・GeoGebra で作った図を、Google スライドで操作し、分かったことをまとめる。
10	・根号を含む式の加法や減法の計算をする。
11	・乗法公式を用いて根号を含む式の計算をする。 【デジタル機器の活用④】 ・Google スライドで図を操作し、計算を理解する。

第3学年「数と式」領域の「平方根」の単元において、デジタル機器を活用し、様々な数学的表現を関連付ける授業を行う。第9時の授業では図3に示す課題を設定し、表5に示す学習の展開を行った。

七王くんの考え

① 1辺が $\sqrt{2}$ である正方形と1辺が $\sqrt{8}$ である正方形を2つ合わせて、
② ピタゴラスのパズルのように切って組み合わせると、
③ 面積が10の正方形ができる。

だから $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{10}$ になる！

(1) 七王くんの考えは正しいですか？

予想 (正しい ・ 正しくない)

図3 第9時の学習指導における課題

表5 第9時の学習の展開

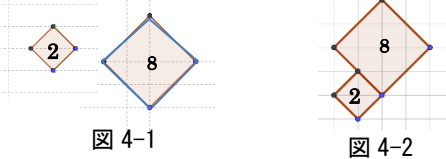
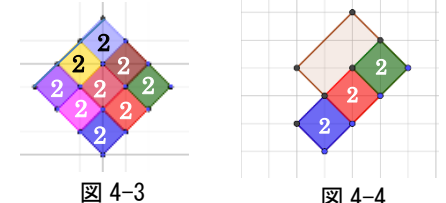
活動	学習の展開
1	課題の提示（ピタゴラスのパズルを操作する）
2	「七王くんは $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{10}$ と考えた。」この考えは正しいかどうか予想する。
3	【発問】 $\sqrt{2} + \sqrt{8}$を表す図をGeoGebraを使って表現することで、七王くんの考えが正しいかどうか確認してみよう。 現実的表現
4	図4-1を使い、式$\sqrt{2} + \sqrt{8}$を意味する図4-2を作る。  図 4-1 図 4-2 図的表現
5	面積が2である正方形を動かす。  図 4-3 図 4-4 操作的表現
6	$\sqrt{2} + \sqrt{8}$の関係を推測し言語的表現へ変換する。 2の平方根の正の方と8の平方根の正の方の和は、2の平方根の正の方の3倍に等しい。 またはこれらの省略的表現。 言語的表現
7	記号的表現へ変換する。 $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ 記号的表現
8	・七王くんの考えは正しいことを理解する。 ・根号の中が同じ数のときは、分配法則を使ってまとめることができることに気付く。（一般化）

表5に示すように、授業の導入でパズルを操作し、

生徒が正しいか疑問に思い調べてみたいと思うようにした。そして、中原（1995）の考えをもとに整理した現実的表現、図的表現、操作的表現、言語的表現、記号的表現など様々な数学的表現を関連付けて考え、 $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{10}$ が正しくないことを理解させ、既習の知識と結び付け計算方法を一般化した。

具体的には、平方根を含む計算について、計算の意味を考え、図4-2を構成し、それに操作を加え、図4-3や図4-4に示すような操作後の表現をもとの計算と関連付けて考えていく。そして、分かったことをGoogleスライドに言語的表現や記号的表現に変換してまとめていく。このように、図的表現、操作的表現、言語的表現、記号的表現をそれぞれ関連付ける活動を行うことで、記号的表現への理解を深めようと考えた。

V 研究授業の分析と考察

1 デジタル機器の活用は、様々な数学的表現を関連付ける活動に有効であったか

(1) 記号的表現を他の数学的表現へ変換することについて

課題を提示したとき、45.7%の生徒が $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{10}$ が正しいと予想した。そこで、 $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ を示す図4-2をGeoGebraで作成し、Googleスライドに貼り付け、面積が2である正方形を画面上で操作することで、図4-3や図4-4などに変換し、図から読み取ったことを言語的表現や記号的表現に変換した。

授業の中で、117名の生徒は式や記号の意味を考え、Googleスライドを活用し、図を操作すること（操作的表現）で図的表現に変換することができた。

しかし、7名の生徒は操作的表現だけに留まっていた。操作する正方形には長さや面積の二つの数量があり、どちらの数量を使って考えればよいかが分からなかったことや、事前の授業で、平方根を図で考える際に必要となる正方形の面積と1辺の長さの関係を十分に押さえることができていなかったことが課題として明確になった。

(2) 様々な数学的表現を関連付けることについて

生徒が式 $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ を図的表現や操作的表現へ変換した内容と、それらを言語的表現や記号的表現へ変換した内容との関係を表6に示す。

様々な数学的表現を関連付けることで、 $\sqrt{8}$ を $2\sqrt{2}$ に変換することの意味を考えることができた生徒は83名であった。その中で、 $\sqrt{2} + \sqrt{8} = 3\sqrt{2}$ または $\sqrt{18}$ に変換することができた生徒は47名であった。

表6 生徒の変換の様子

図的（操作的） 記号的（言語的）	3個を1列に 並べる （図4-4）	9個で正方形 をつくる （図4-3）	5個をL字 に並べる	6個で長方形 をつくる	その他の 図	図なし
記号的表現、言語的表現 に正しく変換	9	14	18	4	2	0
他の表現を使わず式 の裏形だけで考える	1	2	3	0	0	0
操作的表現を言語的 表現に変換	4	1	20	4	0	1
$\sqrt{10}$ が正しいと推測	0	0	5	0	0	0
その他の表現	0	3	5	4	4	1
無答	2	2	5	4	1	5

（当日授業を欠席した8名を除く124名）

表6の太線で囲った部分のように、長さや面積に着目できた生徒の多くは、他の数学的表現への変換ができています。

授業の中で、様々な数学的表現を関連付けた生徒Aの考えを図5に示す。生徒Aは、Googleスライドで、式を図的表現に変換し、それを操作することで関係を見付け言語的表現へ変換した。そして、式の計算の方法を既習の知識を結び付けて考えた。

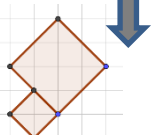
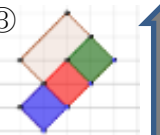
記号的表現	① 式 $\sqrt{2} + \sqrt{8}$	$= \sqrt{2} + 2\sqrt{2}$ $= 3\sqrt{2} \text{ (}\sqrt{18}\text{)}$
図的表現 操作的表現	② 	③ 
言語的表現	④ $\sqrt{8} = \sqrt{2}$ が2個分 $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{2}$ が3個分 $= 3\sqrt{2} \text{ (}\sqrt{18}\text{)}$	また、 $\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$ $= 3\sqrt{2}$

図5 生徒AのGoogleスライド

生徒Aは授業の振り返りに「普通に計算方法を教えてもらうよりも、図を実際に動かしてみると分かりやすかった。なぜその計算結果になるのか分かった。」と書いていた。また別の生徒は「図を操作することで気付いた関係を式や文で表すことができた。」と書いていた。さらに、デジタル機器を活用する授業について「Chromebookだと図が分かりやすく、 $\sqrt{2}$ の正方形を動かしてはめたりできる。」とデジタル機器を活用することによって、他の数学的表現へ変換して関連付けることが容易になったと考えている生徒もいることから、デジタル機器の活用は、他の数学的表現と関連付けることに有効であると考えます。

また、図的表現ができなかった生徒7名のうち4名は、「図の操作から計算方法が分かった。」と答えている。しかし、3名の生徒が「分からない・難しい」と書いていたことが課題として明確になった。

(3) アンケートより

デジタル機器を活用し様々な数学的表現を関連付けて考えることへの生徒の意識変容を調査するために、研究授業の前後でそれぞれ5項目のアンケートを行った。質問項目について、「4. そう思う→1. そう思わない」の4段階で回答を得た。その結果、「どんな計算をすればよいか考えるとき、図を使うと分かりやすいですか。」という質問に対して、授業の前後で生徒の意識変容は表7のようであった。

表7において、研究授業実施後に、肯定的に回答した生徒が増えており、デジタル機器を活用し計算方法などを図的表現に変換することで、他の数学的表現と関連付けて考えやすくなったと感じている。

表7 アンケートのクロス集計

ポストテスト プレテスト	1	2	3	4	計(名)
1	1		1		2
2	1	9	10	2	22
3		5	25	13	43
4			7	38	45
計(名)	2	14	43	53	112

（アンケートを欠席した生徒18名、授業を欠席した2名を除く112名）

また、回答が2から4に上がった生徒Bの研究授業での考えを図6に示す。

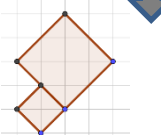
記号的表現	① 式 $\sqrt{2} + \sqrt{8}$	④ $= 1\sqrt{2} + 2\sqrt{2}$ $= 3\sqrt{2}$
図的表現 操作的表現	② 	③ 
言語的表現	$\sqrt{8}$ を $a\sqrt{b}$ の形で表すと、 $2\sqrt{2}$ と表せる。 $\sqrt{\text{中の数}}$ が同じものを、例えば $2y + 3y$ のように 同じ文字の係数を計算できる文字式として考えると （※ $\sqrt{2}$ は $1\sqrt{2}$ とする） $1\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ よって、 $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{10}$ とはいえない。	

図6 生徒BのGoogleスライド

生徒Bは、Googleスライドを活用し、式を図的表現に変換したが、そこから関係を考えることができず、記号操作の方法を考えることで、記号的表現や

言語的表現に変換した。しかし、デジタル機器を活用し、図5に示す生徒Aのような図的表現と他の表現を関連付ける考えを聞く中で、他の生徒が考えた様々な数学的表現と自分が考えた式の変形とを関連付けて考えることができたようである。そのことが、評価が向上した理由として考えることができる。

一方、事後のアンケートで数値が2から1に下がった生徒Cと、評価が1のまま変化がなかった生徒Dがいた。生徒Cと生徒Dは式を図7のような図的表現にそれぞれ変換したが、そこから言語的表現や記号的表現へ変換することができなかった。

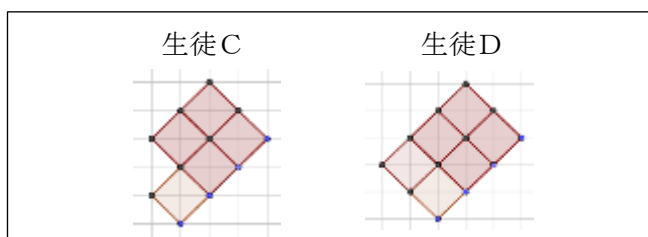


図7 生徒Cと生徒Dの図的表現

理由として、長さや面積という二つの数量で混乱したことが考えられる。式を図4-3や図4-4へ変換するための手立てを考えていくことが課題として明らかになった。

2 様々な表現方法を関連付けることで、記号的表現への理解を深めることができたか

(1) プレテスト・ポストテストの結果より

プレテスト	七王くんは、次のように計算しました。 $(x+a)^2 = x^2 + a^2$ (1) 七王くんの考えは正しいですか (正しい . 正しくない) (2) (1) でそう考えた理由を説明しなさい。
ポストテスト	七王くんは、次のように計算しました。 $(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{5})^2 = 2 + 5 = 7$ (1) 七王くんの計算は正しいですか? (正しい . 正しくない) (2) (1) でそう思った理由を説明しなさい。

図8 プレテスト・ポストテスト

記号的表現への理解が深まった状況を「その記号のもつ概念や原理・法則を導き、一般化したり、発

展的に考えたりすることで、既存の知識と結び付けて構造化していくことである。」と定義するとき、図8に示すように既習の知識と結び付け発展的に考える問題をプレテスト・ポストテストで設定した。そして、その結果を表8に示す。

表8 プレテスト・ポストテストの正答率

問題	プレテスト	ポストテスト
(1)	70.4%	75.6%
(2)	62.9%	69.3%

プレテスト・ポストテストについて、生徒Eの記述の変容を図9に示す。

$(x+a)^2 = x^2 + a^2$ (1) 七王くんの考えは正しいですか (<u>正しい</u> . 正しくない) (2) (1) でそう考えた理由を説明しなさい。 分配ほうそくを使う	$(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{5})^2 = 2 + 5 = 7$ 1) 七王くんの計算は正しいですか? (正しい . <u>正しくない</u>) 2) (1) でそう思った理由を説明しなさい。 $\sqrt{5} \times 2 \times \sqrt{2}$ の計算が ばいけう。
--	--

正しく展開

$$(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{5} \times 2 \times \sqrt{2} + \sqrt{5}^2 = 2 + 2\sqrt{10} + 5 = 7 + 2\sqrt{10}$$

ここの計算が
ぬけている!!

図9 生徒Eの変容の様子

生徒Eは、プレテストでは、分配法則とは括弧の中の項をそれぞれ2乗することであると誤った考えをしていたが、ポストテストでは、公式への理解が深まり正しく展開することができている。

これは、 $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{10}$ にならないことを確認する場面で、「 $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ を2乗するとどうなるのか」と生徒に問いかけ、図10に示すように1辺が $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ である正方形の面積として考えた際、式の変形だけで考えるのではなく、様々な表現を関連付け、既習の知識と結び付け振り返って考えたことで、分配法則についての正しい理解が深まったと考えられる。

また、プレテスト問題(2)で誤答であった生徒の53.8%はポストテストで適切に答えることができていっている。

このことから、他の数学的表現を関連付けて考えることは、記号的表現への理解を深めることに有効であると考ええる。

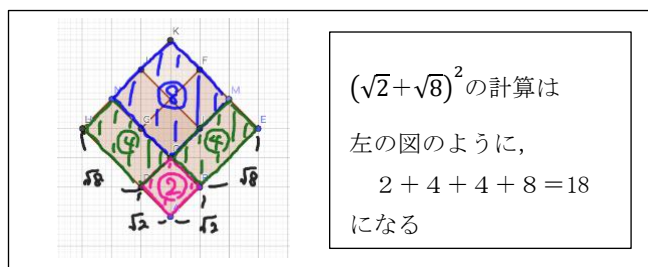


図 10 $(\sqrt{2} + \sqrt{8})^2$ の計算

(2) 授業の振り返りより

研究授業後の生徒の振り返りを記述内容によって分類すると、ア～カのようになった。

- | | | |
|---|--------------------------------------|--------|
| ア | 図で考えることで分かりやすい | ・・・44名 |
| イ | 計算の手順、意味を理解した | ・・・26名 |
| ウ | $\sqrt{18}$ 、 $3\sqrt{2}$ になることを理解した | ・・・12名 |
| エ | $\sqrt{8}$ の意味を理解した | ・・・7名 |
| オ | 平方根の意味が分かった | ・・・5名 |
| カ | 分からない・難しい | ・・・18名 |

振り返りでは、「図形を使って考えることは、最初は難しかったけど、最後には分かりやすかったです。正方形をもとに考えると、ちゃんと理屈が通っていて、納得いきました。」「 x と y などの文字の計算と似ていることも分かった。」「 $\sqrt{2}$ と $\sqrt{8}$ の関係性を式に表すことで、図を見ながらだけ解くことができた。次は式だけで考えていくので、頑張りたいと思った。」と生徒が書いているように、様々な数学的表現を関連付け、既習の知識と結び付けて理解を深めたと考えることができる。

このことから、他の数学的表現を関連付けて考えることは、記号的表現の理解を深めることに有効であると考ええる。

一方で、分類カの生徒について、9名はポストテスト問題(2)に的確に答えることができたが、振り返りに「計算の仕方は知っていたけれど $\sqrt{18}$ を出す方法が思い浮かばなかった。図で考えるよりも式で考えたほうが個人的には好きだった。」「図で表すことによって考えることが増えて難しかった。」と書いているように、記号的表現の特性から、形式的な式の変形の方が簡単であるため、他の表現へ変換し、意味を考えることの方が難しかったようである。

VI 研究のまとめ

1 研究の成果

中学校第3学年「数と式」領域の「平方根」での学習指導の検証結果から、デジタル機器を活用し、図的表現や操作的表現など他の数学的表現を関連付けることが、記号的表現への理解を深めることに有効であることが分かった。

2 研究の課題

本研究では、式を図的表現や操作的表現へ変換するとき、正方形には「長さ」、「面積」の二つの数量があることが困難さを感じる要因になることが分かった。また、記号的表現の特性から、式の変形だけで理由を考えることの方が簡単なため、一部の生徒には、他の数学的表現への変換は、考えることが増えると感じ、難しさにつながってしまったようである。このような課題を解決するには、まず長さで関係を考え、次に面積で考えるというように、ポイントを絞って順に考えることや、学年の当初から他の表現と関連付けて考える指導をしておくことが必要であると考ええる。また、本研究では、 $\sqrt{2} + \sqrt{8}$ を意味している図を最初から提示したが、生徒自身が式の関係を表す図を考えることで、より記号的表現への理解を深めることにつながると考える。

【注】

- (1) 広島県教育委員会「令和2年度広島県公立高等学校入学者選抜 一般学力検査の結果」に詳しい。
- (2) 中原忠男(1995):『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』聖文新社 pp. 199 - 202 に詳しい。
- (3) 中原忠男(1995):前掲書 pp. 253 - 264 に詳しい。
- (4) 中原忠男(1995):前掲書 p. 269 に詳しい。
- (5) 中原忠男(1995):前掲書 pp. 193 - 205 に詳しい。
- (6) 主税保徳(2021)「数学的な表現を関連付ける算数科授業づくり - 思考を深める学習問題と対話的な学びを通して -」に詳しい。

【引用文献】

- 1) 文部科学省(平成30年):『中学校学習指導要領(平成29年告示)解説数学編』日本文教出版株式会社p. 170
- 2) 文部科学省:前掲書p. 25
- 3) R. R. Skemp(1973):『数学学習の心理学』新曜社p. 35
- 4) 日本人間教育学会(2017)『教育フォーラム 60 深い学びのために』株式会社金子書房 p. 7
- 5) 中央教育審議会答申(令和3年):『「令和の日本型学校教育」の構築を目指して～全ての子供たちの可能性を引き出す、個別最適な学びと、協働的な学びの実現～」p. 19
- 6) 中原忠男(1995):前掲書p. 247
- 7) 中原忠男(1995):前掲書p. 248