1 コラッツ予想という未解決問題がある。

―任意の自然数に対し、それが奇数ならば３倍して１を足す。
偶数ならば２で割る。この操作を繰り返すと、いずれ必ず１になる。―

高校生の掛山くんと二条さんがこの証明の難しさを論じていたところ「奇数と偶数に対する操作を変えることで、証明が可能な問題を作ることができないか？」と掛山くんが発案し、二条さんもその提案を受け入れることにした。

掛山くんの予想

―任意の自然数に対し、それが奇数ならば３倍して１を引く。
偶数ならば２で割る。この操作を繰り返すと、いずれ必ず１になる。―

掛山くんはすぐに予想が正しくないことに気付いた。例えば、自然数14に対して 14→7→20→10→5→14→7→20→⋯　となり、同じ数の繰り返しが発生するからだ。次に、二条さんが次の予想を立てた。

二条さんの予想

―任意の自然数に対し、操作[A]と[B]を繰り返すといずれ必ず１になる。―
操作[A]　奇数は２乗して１を引く。
操作[B]　偶数は２で割る。（※１になったら操作を止める）

※　例えば自然数10に対しては、操作をBABBBABBBの順で行うことになる。
(10→5→24→12→6→3→8→4→2→1)

二条さんの予想について、次の問いに答えよ。

(1)　操作[A]と操作[B]を繰り返して１になる自然数を１つ答えよ。

(2)　p を任意の自然数とする。$2^p \pm 1$ と表される自然数に対して、操作[A]と操作[B]を繰り返すといずれはその自然数が１となることを証明せよ。

(3)　ある自然数は操作[A]と操作[B]を繰り返しても１にならない。その自然数の条件について述べ、その理由を説明せよ。

－－

EX.（優れた考察には加点を行います）

掛山くんと二条さんの予想を知ったあなたは、新たに予想を立てようと考えた。次の条件のもと、自由に予想を立て、その予想について考察を述べよ。

条件１　任意の自然数または整数に２つの操作を繰り返すとある特定の数になること。

条件２　各操作を行った結果の数値は必ず自然数または整数になること。

※　掛山くんや二条さんの予想のように「正しくない」または「正しいことを証明できない」ものでもよい。その場合は「なぜ正しくない予想となったのか」「なぜ正しいことを証明できないのか」について、その原因を考察せよ。

2 次の問い(1)～(4)に答えよ。

(1)　５の倍数を除いた自然数を小さい方から順に並べてできる数列 $\{a_n\}$

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 16,\ \cdots\cdots$$

の一般項が、 $a_n = n + \left[\dfrac{n}{4} - \dfrac{1}{4}\right]$ で表されることを示せ。

(2)　平方数を除いた自然数を小さい方から順に並べてできる数列 $\{a_n\}$

$$2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,\ 17,\ 18,\cdots\cdots$$

の一般項 a_n を求めよ。

(3)　(1)の数列の一般項は、 $a_n = n + \left[\dfrac{n}{4} - \dfrac{1}{4}\right]$ 以外の表し方でも表すことができる。どのような一般項が考えられるか。

(4)　(2)の数列の一般項も、いくつかの表し方が知られている。どのような一般項が考えられるか。

－－

EX.（優れた考察には加点を行います）

(2)の数列から、さらに５の倍数を除いてできる数列 $\{a_n\}$

$$2,\ 3,\ 6,\ 7,\ 8,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 17,\ 18,\cdots\cdots$$

の第１項から第 N 項までが一致するような数列の一般項を求めよ。
ただし、N は自分の好きな数でよい。

3 AB≒ACの鋭角三角形ABCがある。辺BCの中点をOとし，辺BCを直径とする円と、辺AB、ACの交点をそれぞれD、Eとする。また、∠DOEの二等分線と∠BACの二等分線の交点をP、∠DOEの二等分線と辺DEの交点をQとする。次の問いに答えよ。

(1)　∠OAP＝∠QAP であることを証明せよ。

(2)　点Pは△ODEの内心であることを証明せよ。

－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

EX.（優れた考察には加点を行います）

∠BACの二等分線と辺BCの交点をFとする。

９点A、B、C、D、E、F、O、P、Qのうち、同一円周上にある４点の組をできるだけ多く見つけよ。

4 右図のような縦４×横４のカードを考える。

1列目	2列目	3列目	4列目

１列目には１～15、２列目には16～30、
３列目には31～45、４列目には46～60の異なる自然数を
１つのマスに１つずつランダムに入れて、カードを作る。
このカードを使って、以下のゲームを行う。
袋に入れた１～60までの自然数が１つずつ書かれている
60枚の札を、ランダムに１枚取り出し、取り出した札と
同じ数字がカードにあれば、その数字を塗りつぶす。
カードの縦・横・斜めの列のうち、どこかの１列の数がすべて塗りつぶされるとクリアとなる。札は１枚ずつ取り出し、元に戻さないとする。クリアになった後も札がなくなるまでこのゲームを続けるとする。次の(1)～(5)の問いに答えよ。

(1)　札を４枚取り出したときにクリアになる確率を求めよ。

(2)　札を５枚取り出すまでにクリアになる確率を求めよ。

(3)　札を７枚取り出すまでにクリアになる確率を求めよ。

(4)　札を８枚取り出すまでにクリアにならず、かつカードに書かれている数を７個含む場合を求めよ。ただし、${}_n\mathrm{P}_r$ や ${}_n\mathrm{C}_r$、$n!$ は計算せずにそのままの形で答えてもよい。

(5)　札を57枚取り出したときにクリアになる確率を求めよ。

次に縦４×横４のカードと同じように、縦ｎ×横ｎ のカードを考える。
このカードには m 列目に $(15m-14)$ ～ $15m$ までの異なる自然数が、１つのマスに１つずつランダムに入れて作られている。また、袋に 1～$15n$ までの札を入れ、上記と同じルールでゲームを行う。(6)の問いに答えよ。

(6)　$(2n-1)$ 回目までにクリアになる確率を求めよ。ただし、${}_a\mathrm{P}_b$ や ${}_a\mathrm{C}_b$、$a!$ は計算せずにそのままの形で答えてもよい。